

D I P L O M A R B E I T  
im Fach P H Y S I K

Multistabilität in nichtlinearen  
Mikrowellenresonatoren

von Detlef Kaiser  
aus Gevelsberg

Westfälische Wilhelms-Universität Münster  
im April 1984

# Inhaltsverzeichnis

	Seite
Einleitung	1
1 Mikrowellenresonator	3
1.1 Aufbau der Leitung	3
1.2 Eigenschaften des Mediums	5
1.3 Fabry-Perot Resonator	7
1.4 Ringresonator	8
2 Experimentelle Untersuchungen	10
2.1 Meßaufbau	10
2.2 Meßergebnisse	13
2.2.1 Amplitudenabhängige Transmission	13
2.2.2 Frequenzabhängige Transmission	20
3 Solitonzustände und Multistabilität	26
3.1 Parametrischer Pulsgenerator	26
3.2 Experimentelle Ergebnisse	35
Zusammenfassung	45
Literaturverzeichnis	46

## Einleitung

Nichtlineare Wellenausbreitung wird seit mindestens zwei Jahrzehnten intensiv und mit wachsendem Interesse in den verschiedensten physikalischen Gebieten untersucht.

In der Optik ist in den letzten Jahren sowohl theoretisch als auch experimentell die Nichtlinearität eines Mediums in Verbindung mit einer Rückkopplung dazu benutzt worden, Bistabilität in einem optischen Bauelement hervorzurufen /1/. Dazu muß die Kennlinie des Bauelementes, die die Abhängigkeit einer Systemantwort von einer Eingangsgröße bei festen Parametern beschreibt, mehrdeutig sein. Bei zwei möglichen Systemantworten spricht man von Bistabilität, bei mehr als zwei möglichen Zuständen des Systems von Multistabilität. Neben dem tieferen Verständnis der physikalischen Effekte ist auch die technische Realisation solcher Bauelemente (als Speicher, Transistor oder Logikbausteine) für die Opto-Elektronik, eventuell sogar für eine optische Nachrichten- oder Computertechnik sehr interessant.

Aus diesem Interesse heraus werden jetzt schon Systeme untersucht, die für genügend große Nichtlinearitäten sogar Multistabilität zeigen. Dabei werden sowohl intrinsische Bauelemente, bei denen die Rückkopplung durch eine Resonatorconfiguration erfolgt, als auch sogenannte Hybridbauelemente, die durch die äußere elektrische Beschaltung rückgekoppelt werden, untersucht.

Theoretisch wird für einen Fabry-Perot Resonator, der ein optisches Medium mit intensitätsabhängigem Brechungsindex (dispersive Nichtlinearität) enthält, eine Multistabilität zeigende Kennlinie vorausgesagt /2/. Experimentell konnten wegen zu geringer Nichtlinearitäten bisher nur stufenartig aufeinanderfolgende stabile Niveaus beobachtet werden /3,4/. Für einen Ringresonator, der mit einem Zwei-Niveau-Absorbermedium gefüllt ist (absorptive Nichtlinearität), erwartet man ebenso eine Multistabilität

zeigende Kennlinie /5/. Für ein Hybridbauelement mit sukzessive aufeinanderfolgenden Bistabilitäten wurden sogar schon mehrwertige Logikoperationen durchgeführt /6/.

Während in den betrachteten Fällen der nichtlinearen Optik im allgemeinen die Polarisation des Mediums kubisch vom Feld abhängt (kubische dispersive Nichtlinearität), wird in dieser Arbeit ein Medium mit quadratischer, dispersiver Nichtlinearität untersucht. Dieses Medium wird durch eine Hochfrequenzleitung realisiert, die als Kettenleiter ausgebildet ist /7/. Durch die Wahl geeigneter Randbedingungen ist die Leitung ohne großen Aufwand sowohl als Fabry-Perot als auch als Ringresonator zu betreiben und erlaubt darüber hinaus auch die in der Optik nur sehr schwierig oder gar nicht durchführbaren Messungen des Spektrums und der Wellenform des Feldes am Ausgang des Resonators, aber auch innerhalb des Resonators.

Es werden experimentell gewonnene Multistabilität dokumentierende Kennlinien sowohl des Fabry-Perot als auch des Ringresonators vorgestellt. Dabei ist von Interesse, inwieweit sich diese Kennlinien unterschiedlicher Resonatoren mit gleichem Medium vergleichen lassen. Anschließend wird ein Konzept vorgestellt, welches es ermöglicht, die verschiedenen stabilen Zustände eindeutig durch die Wellenform im Resonator zu charakterisieren. Es wird eine Formel abgeleitet, mit der die maximal mögliche Anzahl von Zuständen angegeben werden kann.

## 1 Mikrowellenresonator

In diesem Kapitel soll der verwendete Mikrowellenresonator mit den Eigenschaften seines Mediums und den beiden realisierten Resonatortypen kurz vorgestellt werden. Eine ausführlichere Beschreibung ist den in diesem Kapitel angegebenen Literaturhinweisen zu entnehmen.

### 1.1 Aufbau der Leitung

Der Mikrowellenresonator besteht im wesentlichen aus einer Hochfrequenzleitung, die als Eindrahtleitung über einer metallisch leitenden Schiene mit einem U-förmigen Querschnitt verläuft (Abb. 1.1.1). Es handelt sich somit um eine Lecher-Leitung.

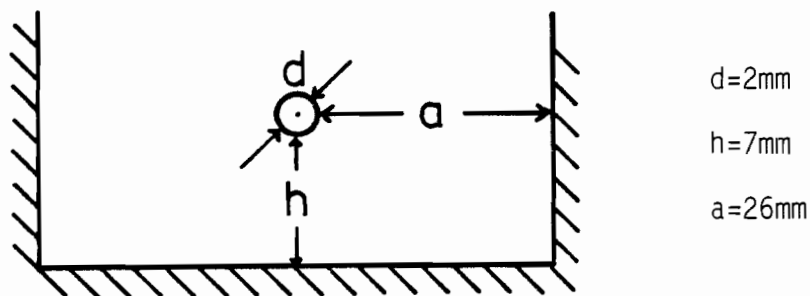


Abb. 1.1.1 Querschnitt der Lecher-Leitung

Die Leitung kann man sich wegen der in gleichmäßigen Abständen  $l$  erfolgenden Belastung durch insgesamt neunzig identische Varaktordioden vom Typ BB 105 G - der Arbeitspunkt liegt im Sperrbereich - aus ebensovielen gleichen, symmetrischen Vierpolen aufgebaut denken /8/.

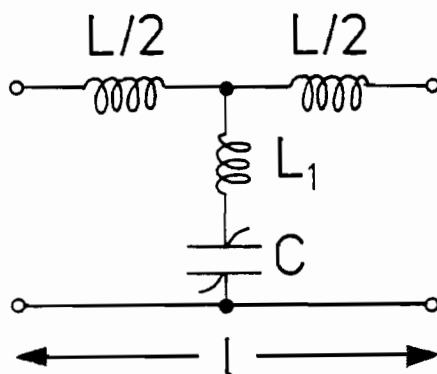


Abb. 1.1.2

T-Schaltung der Länge  $l$   
aus konzentrierten  
Elementen /8/

Jeder dieser Vierpole hat die Form eines T-Gliedes (Abb. 1.1.2), in dessen Längszweig sich eine Spule (Induktivität der Leitung) und in dessen Querzweig sich ein Kondensator (Sperrschichtkapazität der Diode) in Serie mit einer Spule (Induktivität der Zuleitung) befindet. Der Kondensator ist nichtlinear, da die Sperrschichtweite der Diode vom anliegenden elektrischen Feld abhängt. Durch die Hintereinanderschaltung der Vierpole erhält man einen Kettenleiter, der einen Tiefpaß darstellt.

Die Gleichspannung, die zur Einstellung des Arbeitspunktes im Sperrbereich nötig ist, wird den Varaktordioden über fünf parallele RC-Tiefpaßfilter zugeführt. Die obere Grenzfrequenz des Tiefpaßfilters liegt im kHz-Bereich, so daß die auf der Leitung verwendeten Hochfrequenzsignale, die im Bereich von zehn MHz bis ein GHz liegen, nicht über die Gleichspannungseinkopplung abfließen können (Abb. 1.1.3).

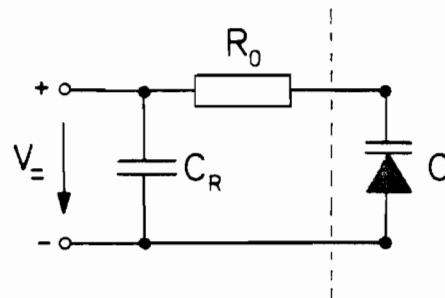


Abb. 1.1.3 RC-Element zur Einkopplung der Gleichspannung  $V_0$

## 1.2 Eigenschaften des Mediums

Anstelle eines Ersatzschaltbildes aus konzentrierten Elementen, wie es das T-Glied der Vierpoltheorie darstellt, kann man den Tiefpaßcharakter der Leitung auch durch das differentielle Leitungselement beschreiben. Hierbei bilden Induktivitäts- und Kapazitätsbeläge das homogene Ersatzschaltbild (Abb. 1.2.1).

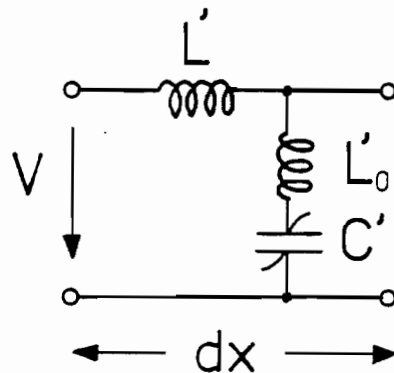


Abb. 1.2.1 Homogenes Ersatzschaltbild

Im Kleinsignalfall, das heißt bei kleinen Amplituden des Hochfrequenzfeldes, sind bei geeigneter Wahl der Leitungsparameter die aus beiden Ansätzen resultierenden Dispersionsbeziehungen in erster Näherung ineinander überführbar, wobei die folgende kubische Dispersionsrelation resultiert /9/:

$$\beta = \frac{1}{u_0} \left( \omega + \frac{1}{2} k \omega^3 \right) \quad (1.2.1)$$

Hierbei ist  $\beta$  die Wellenzahl,  $f = \frac{\omega}{2\pi}$  die Frequenz,  $u_0$  die Phasengeschwindigkeit für kleine Frequenzen und  $k$  der Dispersionsparameter. Um die Näherung durchführen zu können, müssen die auftretenden Frequenzen klein gegen die Grenzfrequenz des Tiefpasses sein.

Bei kleinen Amplituden des Hochfrequenzfeldes wird die Sperrschichtweite der Dioden und damit der Kapazitätsbelag  $C'$  nur durch die anliegende Gleichspannung bestimmt:  $C' = C'_0 = \text{const.}$

Bei größeren Amplituden des Hochfrequenzfeldes wird die durch die Gleichspannung eingestellte Sperrschichtweite der Dioden vom elektrischen HF-Feld ver-

schofen, die Sperrschichtkapazität wird aussteuerungsabhängig. Es ergibt sich in erster Näherung eine lineare Abhängigkeit des differentiellen Kapazitätsbelages  $C'$  der Diode von der angelegten HF-Spannung  $V$ :

$$C'(V) = C_0'(V_{\underline{}}) \cdot (1 - \delta V) \quad (1.2.2)$$

$\delta$  ist der Nichtlinearitätsparameter. Betrachtet man die Ladung  $Q$  auf den Platten der Kapazität, die den Einfluß des Mediums beschreibt, so zeigt sich, daß es sich um eine quadratische Nichtlinearität handelt:

$$Q(V) = C_0 \cdot (V - \frac{\delta}{2} V^2) \quad (1.2.3)$$

Die beiden wichtigen Eigenschaften des Mediums, Dispersion und Nichtlinearität, erkennt man auch in der Wellengleichung des Systems, die beispielsweise aus dem homogenen Ersatzschaltbild hergeleitet werden kann /9/:

$$V_{xx} - \frac{1}{u_0^2} V_{tt} = - \frac{1}{2u_0^2} \delta \cdot (V^2)_{tt} - \kappa V_{xxtt} \quad (1.2.4)$$

Die Indizes in dieser Gleichung vom Boussinesq-Typ bedeuten partielle Differentiation nach der entsprechenden Variablen. Durch eine Koordinatentransformation in ein mitbewegtes System läßt sich die Boussinesq-Gleichung in eine Korteweg-de Vries (KdV) Gleichung umformen /9/:

$$V_{\xi} = V V_{\tau} + \sigma V_{\tau\tau\tau} \quad (1.2.5)$$

Die wichtigsten Lösungen dieser Gleichung sind die stationären Wellen, speziell die seit langem bekannte Solitonlösung:

$$V = V_S \cdot \operatorname{sech}^2 ((\tau - \xi/u_S)/w) \quad (1.2.6)$$

mit der Geschwindigkeit  $u_S$ , Halbwertsbreite  $w$  und der Amplitude  $V_S$  (bei  $\xi = \pm \infty$ ) des Solitons.

Bei periodischen Randbedingungen sind die stationären periodischen Lösungen



der KdV-Gleichung, die sogenannten cn-Wellen von Bedeutung. Diese lassen sich durch die Umkehrfunktion eines elliptischen Integrals, die Jacobische elliptische Kosinusfunktion ausdrücken. Unter der Bedingung großer Nichtlinearität und schwacher Dispersion lassen sich diese cn-Wellen sehr gut als periodische Folge von Solitonen darstellen /10/.

### 1.3 Fabry-Perot Resonator

Schließt man die Hochfrequenzleitung an ihren Enden durch einen Kondensator der Kapazität  $C_M$  ab, so bewirkt dessen Blindwiderstand in Serie mit dem Koaxial-Meßsystem (fünfundzwanzig Ohm) eine Fehlanpassung der Leitung. Dieser Sprung im Wellenwiderstand verursacht - genau wie ein teildurchlässiger Spiegel in der Optik - eine teilweise Reflexion der sich ausbreitenden Welle /11,12/. Zwischen den beiden Spiegeln dieses Fabry-Perot Resonators baut sich durch Vielstrahlinterferenz der hin- und rücklaufenden Wellen nach einer kurzen Einschwingzeit eine stehende Welle auf. Konstruktive Interferenz und damit maximale Transmission des Resonators ergibt sich, wenn die Resonanzbedingung erfüllt ist. Mit der Annahme, daß an den Spiegeln keine zusätzliche Phasendrehung erfolgt, muß dazu der Spiegelabstand, das heißt die Länge der Leitung zwischen den beiden Kondensatoren, einem ganzzahligen Vielfachen der halben Wellenlänge des HF-Signals entsprechen.

$$l_0 = N \cdot \frac{\lambda}{2} \quad N=1,2,\dots \quad (1.3.1)$$

Hierbei ist  $l_0 = 90 \cdot l$  die Länge der Leitung und  $\lambda$  ist die Wellenlänge im Medium des Resonators.

Ist das Medium im Resonator linear, so läßt sich das reflektierte, das transmittierte oder auch das Signal im Resonator berechnen. In einem nichtlinearen Medium dagegen, speziell bei der hier vorliegenden quadratischen Nichtline-

arität, werden Oberwellen, sogenannte höhere Harmonische der eingestrahlten Welle im nichtlinearen Medium erzeugt, es kommt zu nichtlinearen Wechselwirkungen zwischen den Harmonischen. Durch diese Rückkopplungsmechanismen ist der Resonator zunächst nicht mehr eindeutig berechenbar. Experimentell findet man eine Übertragungskennlinie (Abb 1.3.1), bei der die Leistung am Ausgang des Resonators bei fester Leistung der anregenden Welle am Eingang des Resonators - aber unterschiedlicher Vorgeschichte des Systems (Hysterese) - zwei verschiedene Werte annehmen kann /13/. Es liegt Bistabilität vor.

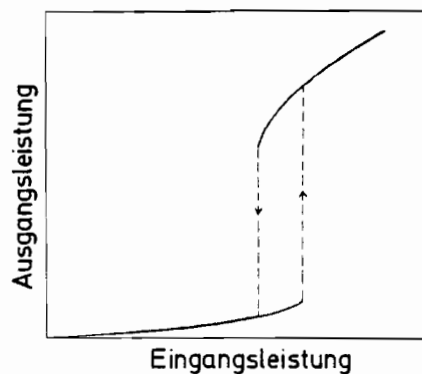


Abb. 1.3.1 Übertragungskennlinie eines nichtlinearen Fabry-Perot Resonators

#### 1.4 Ringresonator

Während sich beim Fabry-Perot Resonator hin- und rücklaufende Wellen überlagern und so durch eine stehende Welle noch zusätzliche räumliche Effekte auftreten, kann die Welle in einem Ringresonator nur in eine Richtung laufen. Der Ringresonator wird mit der gleichen Leitung realisiert, dazu werden Anfang und Ende der Leitung mit einer Koaxialleitung (fünfzig Ohm) verbunden. Damit an den Übergangsstellen nichtlineare Leitung - lineare Koaxialleitung keine Reflexion auftritt, wird der Wellenwiderstand der nichtlinearen Leitung durch Einstellung des Arbeitspunktes der Dioden auf fünfzig Ohm abge-

glichen. Über einen Richtkoppler kann die Welle in definierter Richtung eingekoppelt werden. Der Richtkoppler hat also im Prinzip die Funktion eines teildurchlässigen Spiegels; selbstverständlich kann durch den Richtkoppler auch ein Ausgangssignal ausgekoppelt werden. Resonanz liegt beim Ringresonator vor, wenn die Länge  $l_1$  des gesamten Ringes gleich einem ganzzahligen Vielfachen der Wellenlänge  $\lambda$  des eingestrahlten Signals ist /14/:

$$l_1 = N \cdot \lambda \quad N=1,2,\dots \quad (1.4.1)$$

Die konkreten Werte der in diesem Kapitel kurz vorgestellten Leitung und die des Mediums sind der folgenden Tabelle zu entnehmen:

$V_{\underline{=}}$ (V)	$C_o$ (pF)	$L$ (nH)	$L_1$ (nH)	$\delta$ ( $V^{-1}$ )	$u_o$ (m/s)	$k$ ( $s^2$ )
4,00	9,81	15,66	3,67	0,13	$7,66 \cdot 10^7$	$5,30 \cdot 10^{-20}$
7,00	6,59	16,36	3,59	0,10	$9,16 \cdot 10^7$	$3,67 \cdot 10^{-20}$

Länge eines Elementes  $l=3\text{cm}$       Anzahl der Elemente: 90

Länge der Leitung  $l_o=2,70\text{m}$       Spiegel-Kapazität  $C_M=4,5\text{pF}$

Gleichspannungseinkopplung durch fünf parallele RC-Tiefpaßfilter mit je:

$$R_o = 1 \text{ M}\Omega \quad \text{und} \quad C_R = 3,5 \text{ nF}$$

Kleinsignal-Grenzfrequenz: 583 MHz ( $V_{\underline{=}}=4,00\text{V}$ )      und      707 MHz ( $V_{\underline{=}}=7,00\text{V}$ )

## 2 Experimentelle Untersuchungen

Die bei der Untersuchung eines Fabry-Perot Resonators mit quadratischer Nichtlinearität erstmalig experimentell beobachteten Multistabilität dokumentierenden Kennlinien /12/ sollen in diesem Kapitel genauer untersucht werden. Dabei wird sowohl beim Fabry-Perot als auch beim Ringresonator versucht, durch Vergleiche von experimentellen Kennlinien verschiedener Ordnung  $N$  der Resonanz eine Systematik zu entdecken, die es erlaubt, die beobachtete Multistabilität besser zu verstehen.

### 2.1 Meßaufbau

Das Blockschaltbild in Abb. 2.1.1 zeigt das Prinzip der verwendeten Aufbauten:

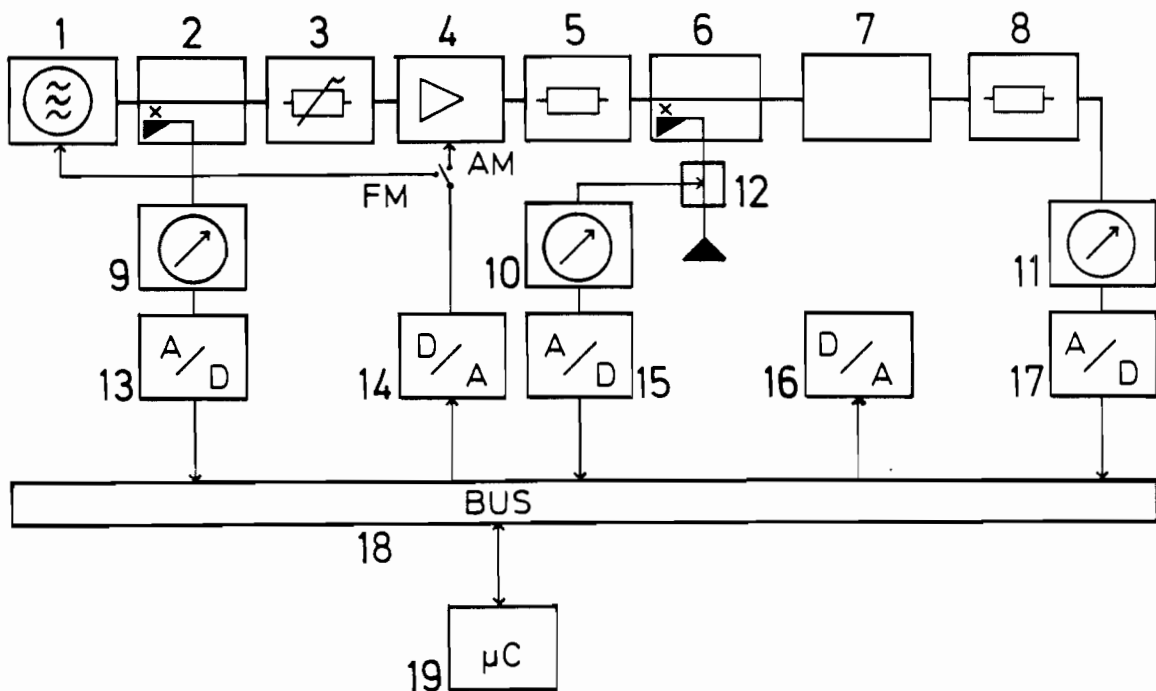


Abb. 2.1.1 Blockschaltbild der Meßaufbauten:

- 1 Meßsender 2/6 Richtkoppler 3 einstellbarer Abschwächer
- 4 Verstärker 5/8 Dämpfungsglied 7 Meßobjekt
- 9/10/11 Meßgerät 12 Durchführungsadapter des Vektorvoltmeters
- 13/15/17 Analog-Digital Wandler 14/16 Digital-Analog Wandler
- 18 IEEE-488 Interface Bus 19 Tischrechner

Es erwies sich als sinnvoll, die Kennlinien mit Hilfe eines rechnergesteuerten (APPLE II) Meßplatzes aufzunehmen. Durch diese Apparatur war es möglich, Meßwerte auszulesen, Meßkurven zu plotten und - was bei teilweise mehrfach ineinander verschachtelten Hystereseschleifen wichtig war - die zu variierenden Parameter driftfrei und reproduzierbar einzustellen.

Der HF-Generator 1 liefert ein Signal, dessen Frequenz  $f$  über den Richtkoppler 2 vom Frequenzzähler 9 gemessen und über den Bus 18 dem Tischrechner 19 mitgeteilt wird. Nach dem einstellbaren Abschwächer 3, dem Verstärker 4 und dem Dämpfungsglied 5 gelangt das HF-Signal zum Richtkoppler 6. Hier wird durch die Tastspitze im Durchführungsadapter 12 des Vektorvoltmeters 10 die Amplitude  $V_{1\text{ IN}}$  des hinlaufenden Signals gemessen und mit dem programmierbaren Digitalvoltmeter 15 dem Rechner übermittelt. Dieser kann aus der Amplitude - falls erwünscht - die Leistung des Signals berechnen. Nachdem so die Amplitude ermittelt wurde, gelangt das Signal zum Meßobjekt 7. Die das Meßobjekt verlassenden Signale werden - falls nötig, nach Passieren eines Dämpfungsgliedes 8 - vom Meßgerät 11 detektiert. Hierbei kann es sich um einen Spektrumanalysator, ein Leistungsmeßgerät (HP 432 A) oder - falls selektiv die Amplitude  $V_{\text{OUT}}$  einer bestimmten Frequenz gemessen werden soll - um die Tastspitze eines Vektorvoltmeters in einem Durchführungsadapter handeln. Mit dem programmierbaren Digitalvoltmeter 17 wird die entsprechende Größe über den Bus 18 dem Mikrocomputer 19 übergeben.

Die aus den Wertepaaren entstehende Kennlinie kann vom Mikrocomputer 19 mit dem Plotter 16 graphisch dargestellt werden. Mit entsprechenden Programmen kann durch den Rechner 19 über ein programmierbares Netzgerät 14 wahlweise entweder - bei konstanter Frequenz - die Amplitude des HF-Signals am Verstärker 4 stufenlos geregelt werden (AM) oder - bei konstanter Amplitude - die Frequenz des HF-Generators 1 variiert werden (FM). Als Kennlinie des Meßobjektes kann so entweder die amplitudenabhängige oder die frequenzab-

hängige Transmission verstanden werden. Dabei besteht über den Rechner jederzeit die Möglichkeit eines Eingriffs in die Messung, es kann sowohl die Geschwindigkeit als auch die Richtung der Änderung vorgegeben werden.

Bei dem Meßobjekt 7 kann es sich sowohl um den Fabry-Perot als auch um den Ringresonator handeln.

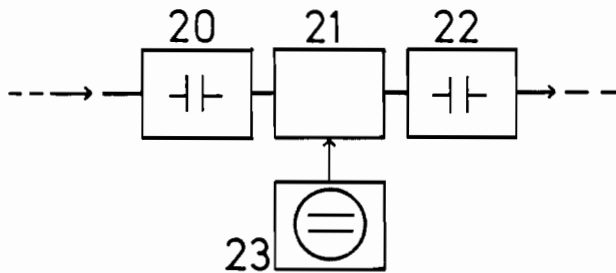


Abb. 2.1.2  
Meßobjekt Fabry-Perot  
20/22 Kondensator  
21 nichtlineare Leitung  
23 Gleichspannungsquelle

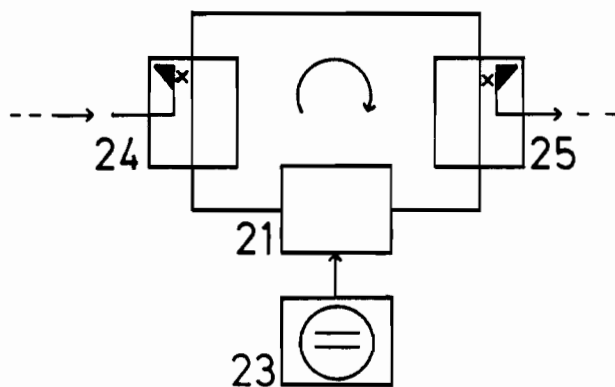


Abb. 2.1.3  
Meßobjekt Ringresonator  
21 nichtlineare Leitung  
23 Gleichspannungsquelle  
24/25 Richtkoppler

Beim Fabry-Perot Resonator (Abb. 2.1.2) besteht das Meßobjekt 7 aus den beiden Kondensatoren 20 und 22, die die Spiegel des Resonators darstellen, der nichtlinearen Leitung 21 als Medium des Resonators und der Gleichspannungsversorgung 23 der Leitung.

Wenn der Ringresonator als Meßobjekt 7 dient, wird das HF-Signal durch den Richtkoppler 24 in definierter Richtung (im Uhrzeigersinn) eingekoppelt und am Richtkoppler 25 wird das transmittierte Signal ausgekoppelt (Abb. 2.1.3). 21 und 23 stellen wie bei Abb. 2.1.2 die nichtlineare Leitung und deren Gleichspannungsversorgung dar.

## 2.2 Meßergebnisse

### 2.2.1 Amplitudenabhängige Transmission

In diesem Abschnitt werden sogenannte Übertragungskennlinien vorgestellt und diskutiert. Bei konstanter Frequenz  $f$  des den Resonator anregenden Signals wird die Abhängigkeit des transmittierten vom anregenden Signal untersucht.

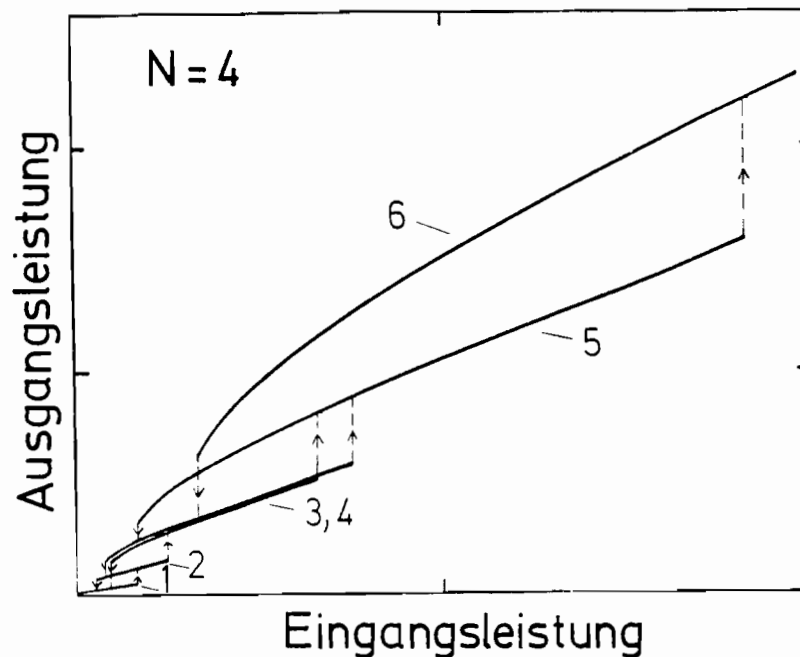


Abb. 2.2.1.1 Übertragungskennlinie des Fabry-Perot Resonators

Die Abb. 2.2.1.1 zeigt eine solche beim Fabry-Perot Resonator gemessene Kennlinie der Ordnung  $N = 4$ . Bei dieser  $4 \cdot \frac{\lambda}{2}$  - Resonanz wird die totale Ausgangsleistung des Resonators, die aus den Signalamplituden verschiedener im Resonator erzeugter Frequenzen resultieren kann, als Funktion der Eingangsleistung des Signals mit der Wellenlänge  $\lambda$  detektiert.

Mit steigender Eingangsleistung wächst auch die transmittierte Leistung langsam an (Zustand 1), bis bei einem ersten kritischen Wert der Eingangsleistung die Ausgangsleistung plötzlich sprunghaft - das heißt unstetig - einen etwa doppelt so großen Wert annimmt. Man sagt, das System springt in den Zustand 2.

Wird die Eingangsleistung jetzt wieder verkleinert, so nimmt auch die transmittierte Leistung stetig ab, bis bei einem zweiten kritischen Wert der Eingangsleistung, der deutlich kleiner als der erste kritische Wert ist, sprungartig der Zustand 1 wieder eingenommen wird.

Die Hystereseschleife ist jetzt geschlossen, es liegt Bistabilität vor, denn zu einem Eingangsleistungswert, der zwischen den beiden kritischen Werten - den Schwellenwerten - liegt, sind - je nach Vorgeschichte des Systems - zwei verschiedene Ausgangsleistungswerte möglich.

Erhöht man die Ausgangsleistung noch weiter, nachdem das System in den Zustand 2 gesprungen ist, so stellt man fest, daß es drei weitere Schwellenwerte der Eingangsleistung gibt, bei denen die transmittierte Leistung weiter sprungartig ansteigt. Man erreicht so nacheinander die Zustände 3, 5 und 6. Verkleinert man im Zustand 6 die Eingangsleistung, so fällt auch die transmittierte Leistung stetig wieder ab, bis sie an einem weiteren Schwellenwert sprungartig einen Wert annimmt ( Zustand 4 ), der - hier - geringfügig kleinerer Ausgangsleistung als Zustand 3 entspricht. Daß es sich hier nicht um eine experimentell bedingte Verschiebung des Zustandes 3 handelt, sondern daß sich im Resonator ein grundsätzlich anderer Zustand 4 eingeschwungen haben muß, erkennt man, wenn die anregende Leistung wieder erhöht wird: Sie kann über den Schwellenwert des Zustandes 3 hinaus erhöht werden, der Sprung des Zustandes 4 in den Zustand 5 höherer Transmission erfolgt erst bei einem deutlich größeren Schwellenwert.

Durch noch mehrmaliges Vergrößern und Verkleinern der anregenden Leistung kann man jeden der jetzt sechs Zustände 1-6 erreichen und die Kennlinie vervollständigen, das heißt für jeden Zustand den oberen Sprungpunkt (zu höherer Transmission) und den unteren Sprungpunkt (zu niedrigerer Transmission) feststellen. Der Zustand niedrigster (1) und höchster (6) Transmission besitzen selbstverständlich nur einen Schwellenwert.



Es bleibt festzuhalten, daß die Kennlinie echte Multistabilität zeigt, es gibt zu einem Wert der Eingangsleistung bis zu vier verschiedene Werte der transmittierten Leistung. Bei dieser Resonanz  $N = 4$  gibt es fünf verschiedene Stufen der Ausgangsleistung, wobei zusätzlich noch eine Stufe in zwei Zustände aufgespalten ist, die sich bezüglich der Leistungstransmission nur geringfügig unterscheiden. Man könnte von einer Entartung dieser Stufe sprechen. Es existieren sechs verschiedene Zustände.

Untersucht man das Frequenzspektrum des transmittierten Signals, so wird bestätigt, daß es sich um sechs klar voneinander zu trennende, eindeutig verschiedene Schwingungszustände des Resonators handelt. Abb. 2.2.1.2 zeigt die mit einem Spektrumanalysator in den sechs Zuständen registrierten Amplituden der transmittierten Fourierkomponenten unterschiedlicher Frequenz.

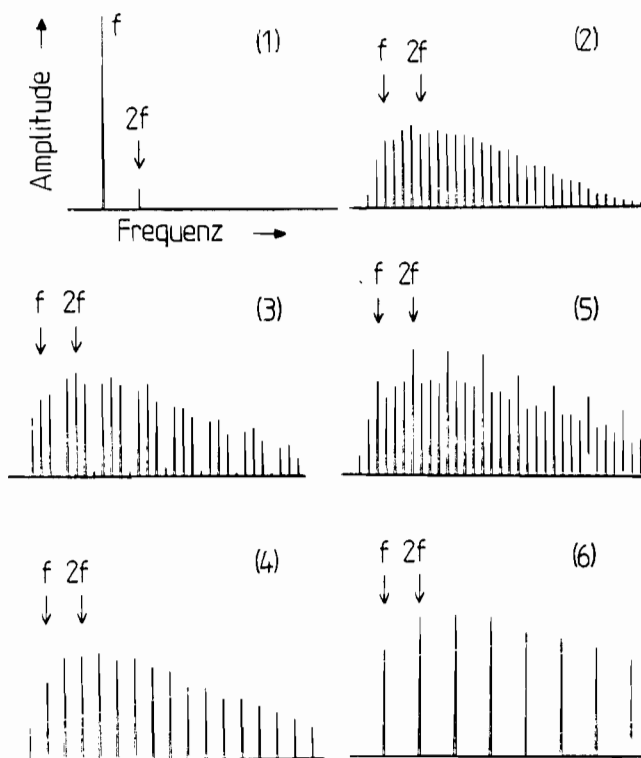


Abb. 2.2.1.2  
Fourierspektren der Zustände  
1-6 der Übertragungskennlinie  
der Ordnung  $N = 4$  des Fabry -  
Perot Resonators

Bei kleinen Eingangsleistungen werden durch den Einfluß der Nichtlinearität Oberwellen, zunächst hauptsächlich die zweite Harmonische, generiert (Zustand 1). Bei höheren Leistungen der anregenden Welle entstehen bei bestimmten Schwellenwerten der Eingangsleistung neben den höheren Harmonischen auch

Subharmonische und deren Oberwellen. Die Schwellenwerte sind identisch mit jenen Werten der Kennlinie, bei denen sich sprunghaft die Transmission ändert. Jedem Zustand 1-6 der Kennlinie kann das dafür typische Spektrum 1-6 zugeordnet werden.

Im Zustand 1 liegt nur die Frequenz der anregenden Welle und die zweite Harmonische vor, im Zustand 6 auch weitere Harmonische bis zur Grenzfrequenz, der Zustand 4 wird durch Oberwellen von  $\frac{f}{2}$  (Frequenzhalbierung) beschrieben. Die Zustände 2, 3 und 5 lassen sich durch Vielfache von  $\frac{f}{4}$  (Frequenzviertelung) beschreiben, wobei beim Zustand 5 die Harmonischen der anregenden Frequenz deutlich größere Amplituden besitzen und beim Zustand 3 die  $\frac{f}{2}$ -Subharmonische und ihre ungeradzahlig Vielfachen fehlen.

Diese typische Form verändern die Spektren nicht, wenn die Eingangsleistung innerhalb eines Zustandes variiert wird. Auch die beiden an Hand der Transmission nur schwer zu trennenden Zustände 3 und 4 der entarteten Stufe sind hier eindeutig voneinander zu unterscheiden.

Die Entstehung dieser Frequenzen ist, wie man leicht sieht, mit der Ordnung  $N = 4$  der Resonanz verknüpft. Die niedrigste resonanzfähige Frequenz - die Eigenfrequenz des Resonators - ist gerade  $\frac{f}{4}$ . Der Zustand höchster Transmission (6) ist wie der Zustand niedrigster Transmission (1) dadurch ausgezeichnet, daß nur höhere Harmonische der eingestrahlten Frequenz  $f$  auftreten.

Durch eine Langzeitmessung wurde im Rahmen der Meßgenauigkeit ( $10^{-7}$ ) der verwendeten Apparatur (Frequenzzähler, usw.) bestätigt, daß sich die Fourierkomponenten des Spektrums wirklich wie natürliche Zahlen zueinander verhalten.

Die Abb. 2.2.1.3 zeigt die selektiv bei der Frequenz  $f$  gemessene Übertragungskennlinie, das heißt, es wird selektiv nur die Amplitude des transmittierten Signals mit der Frequenz  $f$  gemessen und gegen die Anregungsamplitude aufgetragen. Die Kennlinie unterscheidet sich, wie im folgenden dargelegt wird, nur wenig von der oben vorgestellten integral aufgenommenen Kurve.

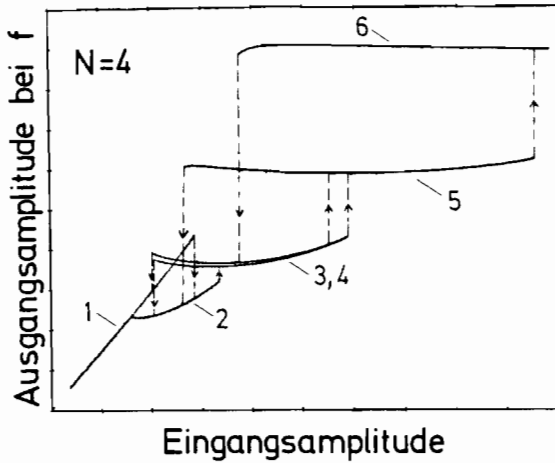


Abb. 2.2.1.3  
Selektive Übertragungskennlinie  
des Fabry-Perot Resonators

Es gibt auch hier fünf Stufen, auch hier ist die mittlere Stufe entartet, so daß insgesamt sechs verschiedene Zustände vorliegen. Am hier allerdings steil ansteigenden Zustand 1 ist deutlich zu sehen, daß bei steigender Anregungsamplitude zunächst die transmittierte Amplitude bei der Frequenz  $f$  ebenfalls größer wird. Beim Schwellenwert fällt die transmittierte Amplitude sprunghaft ab. Offensichtlich wird jetzt Energie der ersten Harmonischen dazu verwendet, um aus dem Rauschen Subharmonische zu generieren. Die Schwellenwerte der einzelnen Zustände stimmen ebenfalls mit der integral gemessenen Kurve überein.

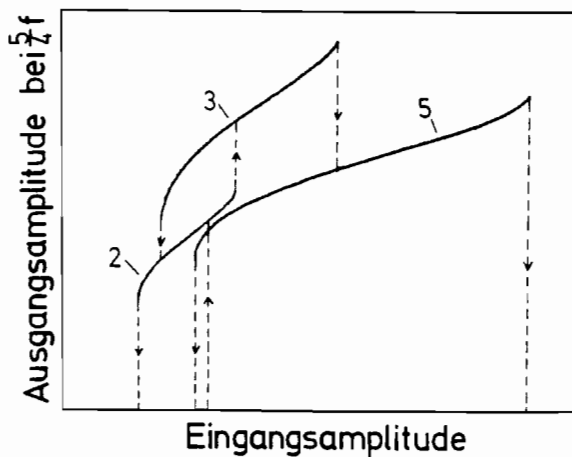


Abb. 2.2.1.4  
Selektive Übertragungskennlinie  
der Ordnung  $N = 4$  des  
Fabry-Perot Resonators

Die Abb. 2.2.1.4 enthält Meßergebnisse, bei denen selektiv die Amplitude bei der Frequenz  $\frac{5}{4} \cdot f$  bei der Ordnung  $N = 4$  des Fabry-Perot Resonators gemessen und gegen die Anregungsamplitude aufgetragen wurde. Diese Kurve unterscheidet sich grundsätzlich von den bisher vorgestellten Kennlinien. Es treten nur

drei verschiedene Zustände auf. Das war auch zu erwarten, denn bei nur drei von sechs Zuständen war im zugehörigen Frequenzspektrum eine Frequenzviertelung zu beobachten (vgl. Abb. 2.2.1.2). An dieser Kennlinie ist sehr schön zu erkennen, daß die Subharmonischen - hier das  $\frac{5}{4} \cdot f$ -Signal - sprunghaft aus dem Rauschen entstehen und auch wieder verschwinden. Dieses Phänomen ist auch bei den sogenannten parametrischen Oszillatoren gut bekannt /15/.

Für einen Vergleich dieser bei einem Fabry-Perot Resonator gemessenen Kennlinien der Ordnung  $N = 4$  mit Kennlinien des Ringresonators, ist in Abb. 2.2.1.5 eine solche selektiv gemessene Kennlinie der Ordnung  $N = 5$  aufgetragen.

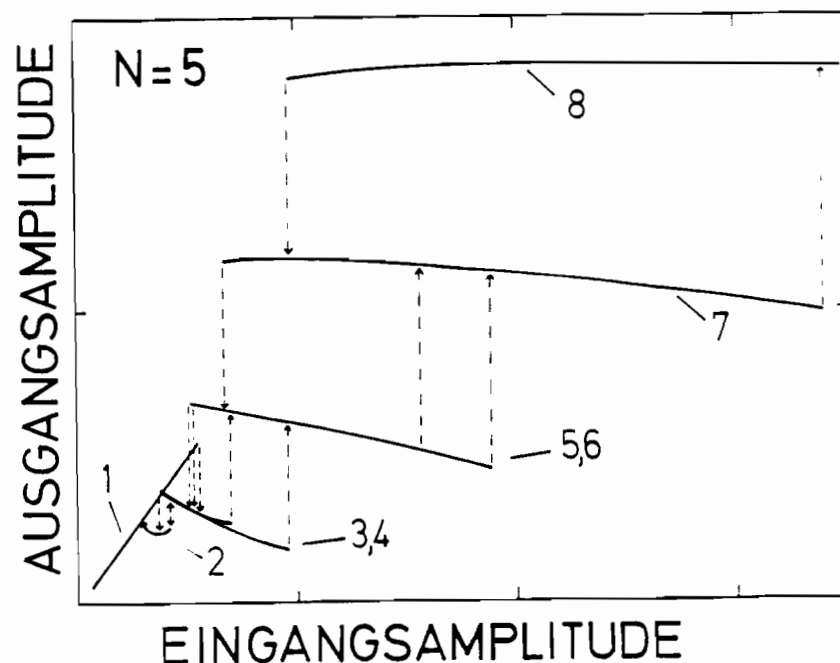


Abb. 2.2.1.5 Übertragungskennlinie des Ringresonators, Ausgangsamplitude selektiv bei der Frequenz  $f$  der anregenden Welle gemessen

Im ersten Teil der Kennlinie (Eingangsamplitude klein) fällt wieder der steile Anstieg des Zustandes 1 auf, auch hier fällt die transmittierte Amplitude bei Erreichen eines Schwellenwertes wegen der Generation von Subharmonischen sprunghaft ab. Es gibt bei dieser Ordnung  $N = 5$  der Resonanz allerdings sechs verschiedene Stufen der Transmission, von denen sogar die beiden mittleren entartet sind (Zustand 3 und 4, bzw. Zustand 5 und 6).



### 2.2.2 Frequenzabhängige Transmission

Als zweiter Schritt wird in diesem Abschnitt die Untersuchung der Kennlinien fortgesetzt, indem sogenannte Resonanzkurven gemessen werden. Dabei wird - bei konstanter Amplitude der anregenden Welle - die Abhängigkeit des transmittierten Signals des Resonators von der Frequenz der anregenden Welle detektiert.

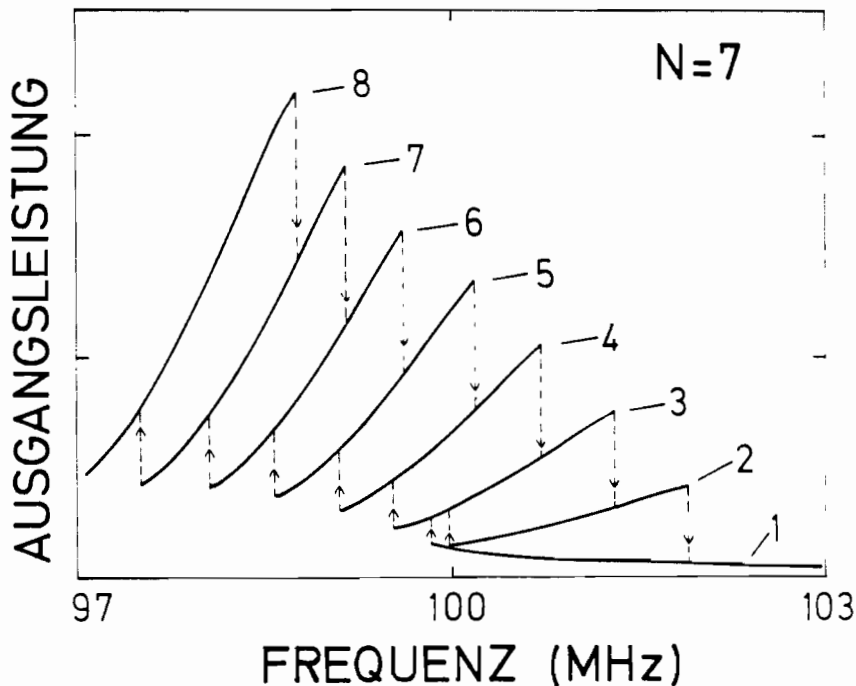


Abb. 2.2.2.1 Resonanzkurve des Fabry-Perot Resonators

Die Abb. 2.2.2.1 und 2.2.2.2 zeigen zwei solcher Resonanzkurven, die beide bei der Ordnung  $N = 7$  des Fabry-Perot Resonators gemessen wurden. Bei beiden Kennlinien wurde der Resonator mit der gleichen konstanten Amplitude angeregt und die Frequenz  $f$  der anregenden Welle über den gleichen Bereich variiert. Die Abb. 2.2.2.1 zeigt die gesamte vom Resonator transmittierte Leistung, während in Abb. 2.2.2.2 selektiv die Amplitude des transmittierten Signals bei der Anregungsfrequenz  $f$  aufgenommen wurde.

Diese Resonanzkurven entstehen prinzipiell auf die gleiche Art wie die Multi-stabilität zeigenden Übertragungskennlinien. Mit steigender Frequenz  $f$  der anregenden Welle steigt auch die Transmission des Resonators bis zu einem

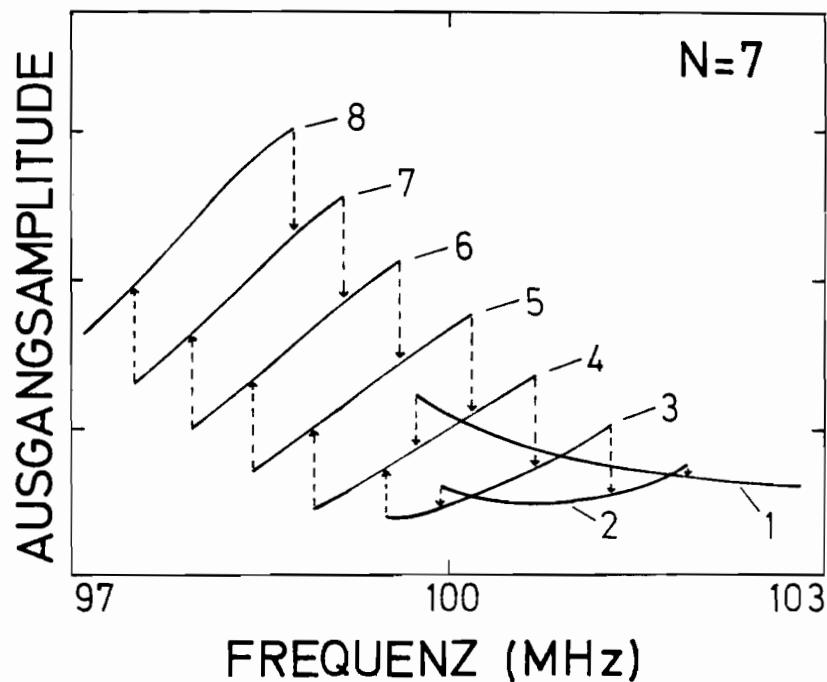


Abb. 2.2.2.2 Resonanzkurve des Fabry-Perot Resonators, Ausgangsamplitude selektiv bei der Frequenz  $f$  der anregenden Welle gemessen

maximalen Wert (Zustand 8), um dann in den Zustand 7 niedrigerer Transmission zu springen. Verringert man jetzt die Anregungsfrequenz wieder, so sinkt die Transmission stetig weiter ab, um an einem zweiten Schwellenwert der Anregungsfrequenz wieder in den Zustand 8 höherer Transmission zu springen. Durch Erhöhen der Anregungsfrequenz im Zustand 7 lassen sich weitere Zustände 6-1 mit niedrigerer Transmission feststellen, und durch entsprechendes Absenken der Frequenz kann eine aus geschlossenen Hystereseschleifen zusammengesetzte Resonanzkurve aufgenommen werden.

Wie auch bei den Übertragungskennlinien unterscheiden sich die bei einer Ordnung der Resonanz gemessene integrale und selektive Resonanzkurve nur in einem - entsprechenden - Detail. Auch hier, bei beiden Resonanzkurven der Ordnung  $N = 7$ , gibt es  $N+1 = 8$  verschiedene Stufen der Transmission. Die Kurven unterscheiden sich - wie die Übertragungskennlinien - nur darin, daß die Stufen bei der Messung der Leistungstransmission voneinander getrennt sind, während sich bei der selektiven Messung Zustände niedrigerer Trans-

mission schneiden. Im Zustand niedrigster Transmission (1) werden zunächst nur höhere Harmonische erzeugt. Bei einem Schwellenwert kommt es wieder zur Generation von Subharmonischen, so daß die Energie, die im Resonator in den Harmonischen - also auch in der in Abb. 2.2.2.2 gemessenen ersten Harmonischen - gespeichert war, jetzt auch in den Subharmonischen gespeichert wird. Es wird ein Zustand von - selektiv - noch niedrigerer Transmission eingenommen. Im Gegensatz zu den Übertragungskennlinien wurde hier keine Entartung der verschiedenen Stufen beobachtet.

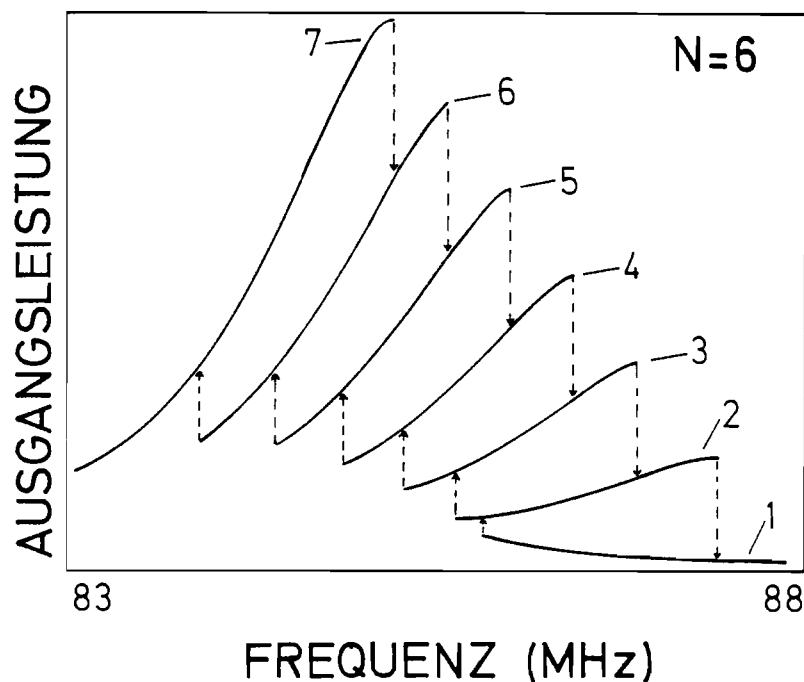


Abb. 2.2.2.3 Resonanzkurve des Fabry-Perot Resonators

Das gilt auch für die Abb. 2.2.2.3, die die Resonanzkurve der Ordnung  $N = 6$  des Fabry-Perot Resonators zeigt. Diese Kennlinie, bei der wieder die Ausgangsleistung als Funktion der Anregungsfrequenz gemessen wurde, gleicht sehr der Abb. 2.2.2.1. Einziger Unterschied: Es gibt nicht acht, sondern nur sieben Stufen der Transmission, die aber ebenfalls nicht entartet sind.

Die selektiv gemessene Resonanzkurve der gleichen Ordnung  $N = 6$  des Ringresonators zeigt ebenfalls sieben Stufen der Transmission (Abb. 2.2.2.4), von denen sich einige niedrigerer Transmission (vgl. Abb. 2.2.2.2) schneiden.



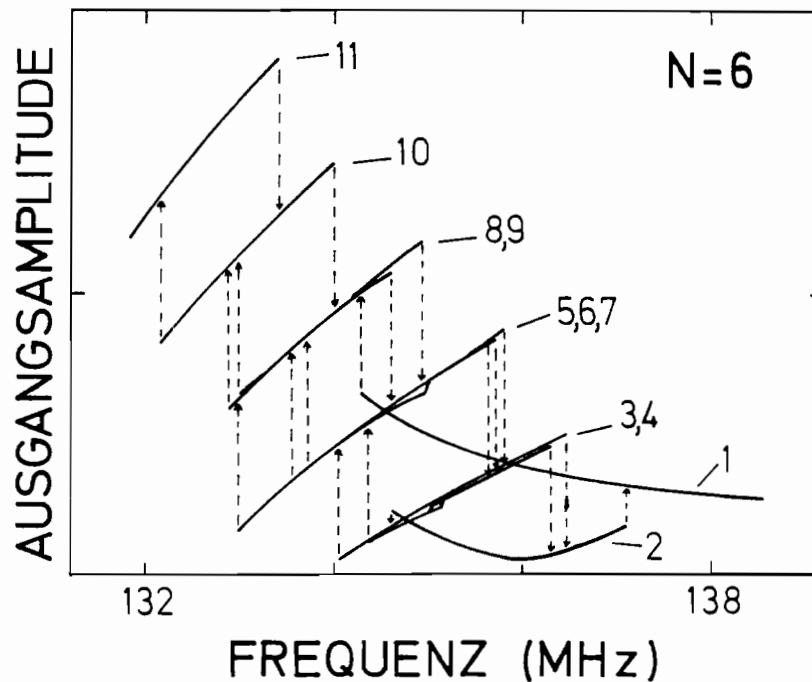


Abb. 2.2.2.4 Resonanzkurve des Ringresonators, Ausgangsamplitude selektiv bei der Anregungsfrequenz gemessen

Hier tritt auch der von den Übertragungskennlinien bekannte Effekt der Entartung einer Stufe auf. Zwei Stufen sind in jeweils zwei Zustände aufgespalten (Zustand 3 und 4 , bzw. Zustand 8 und 9 ), die mittlere Stufe ist sogar dreifach entartet (Zustände 5 , 6 und 7 ), so daß insgesamt elf verschiedene Zustände vorliegen.

Eine auf den ersten Blick grundsätzlich andersartige Resonanzkurve zeigt die Abb. 2.2.2.5 , bei der die gesamte transmittierte Leistung bei der Ordnung  $N = 4$  des Fabry-Perot Resonators als Funktion der Anregungsfrequenz aufgetragen wurde.

Es sind neun Transmissionsstufen erkennbar, von denen nur eine entartet ist, die Kurve ist höchstens tristabil. Da der Zustand maximaler Transmission (5) hier nicht im unteren Frequenzbereich dieser Ordnung der Resonanz liegt, wie es bei den anderen Resonanzkurven der Fall war, liegt es nahe, sich die Kurve - etwa durch einen senkrechten Trennstrich bei 56,4 MHz - in zwei Frequenzbereiche aufgeteilt vorzustellen. Jetzt fällt auf, daß alle Hystereseschleifen des rechtsseitigen Teils der Resonanzkurve eine ähnliche Form haben und über-

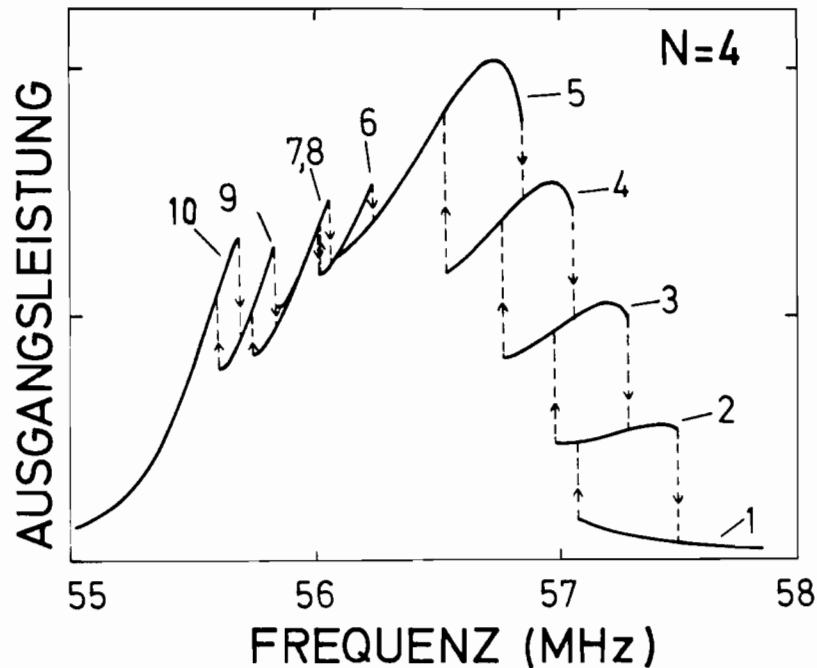


Abb. 2.2.2.5 Resonanzkurve des Fabry-Perot Resonators mit Vorresonanz einander liegen, während alle Hystereseschleifen im linksseitigen Teil der Resonanzkurve nebeneinander angeordnet sind. Außerdem sieht der rechte Teil der Resonanzkurve jetzt genauso aus, wie man es durch die Resonanzkurven höherer Ordnung von einer Kurve der Ordnung  $N = 4$  erwartet hätte: Fünf deutlich übereinander angeordnete Stufen der Transmission. Erhärtet wird diese Interpretation der Kurve durch die in den Zuständen gemessenen Frequenzspektren: Im Zustand maximaler (5) und minimaler Transmission (1) sind nur höhere Harmonische der Anregungsfrequenz vorhanden, in den Zuständen 2, 3 und 4 liegt Subharmonischengeneration - Frequenzviertelung - vor.

Bei dem linken Teil der Resonanzkurve liegen ebenfalls fünf Transmissionsstufen vor, denn der Zustand 5 des rechten Teils der Kurve ist gleichzeitig ein Zustand der linken Kurve. Bei dem Zustand 10 treten im Frequenzspektrum ebenso wie im Zustand 5 nur höhere Harmonische der Anregungsfrequenz auf. Die mittlere Stufe ist entartet (Zustand 7 und 8), im Zustand 7 tritt Frequenzhalbierung, in allen anderen Zuständen (6, 8 und 9) Frequenzviertelung auf.

Es erscheint daher gerechtfertigt, von einer Vorresonanz der

vierten Ordnung zu sprechen. Diese Bezeichnung ist auch berechtigt, wenn man bedenkt, daß große Teile dieser Vorresonanz noch unterhalb der Kleinsignalresonanzfrequenz von 56,13 MHz der Ordnung  $N = 4$  liegen. Bei diesem Medium kommt es durch die nichtlinearen Effekte bei größeren Anregungsamplituden sonst zu einer Resonanzfrequenzverschiebung zu höheren Frequenzen /12/.

In diesem Abschnitt wurden die bei den Übertragungskennlinien gewonnenen Erkenntnisse, wie im folgenden kurz zusammengefaßt wird, auch für Resonanzkurven bestätigt. Bei einer Resonanz der Ordnung  $N$  gibt es  $N+1$  verschiedene Stufen der Transmission. Einige dieser Stufen können in mehrere Zustände entartet sein. Im Zustand minimaler und maximaler Transmission besteht das Frequenzspektrum nur aus höheren Harmonischen der Anregungsfrequenz, in den anderen Zuständen liegt Subharmonischengeneration vor. Die bei Fabry - Perot Resonator und Ringresonator auftretenden Kennlinien sind vergleichbar.

### 3 Solitonzustände und Multistabilität

In diesem Kapitel wird mit dem für KdV-Medien sehr erfolgreichen Solitonenkonzept versucht, ein besseres Verständnis und eine genauere Beschreibung und Vorhersage der Multistabilität zu ermöglichen.

#### 3.1 Parametrischer Pulsgenerator

Die Wellenausbreitung in KdV-Medien kann auf besonders anschauliche Weise durch die Bewegung und Wechselwirkung von Solitonen charakterisiert werden. Dieses Solitonenkonzept sollte sich auch auf den Resonator mit seinen periodischen Randbedingungen übertragen lassen. Dies wird im folgenden untersucht werden.

Solitonen im Resonator erfordern eine Berücksichtigung der räumlich und zeitlich periodischen Randbedingungen des Resonators und der Wechselwirkung der Solitonen mit der anregenden elektrischen Pumpwelle. Bei der Untersuchung der Ausbreitung von Solitonen in einem Medium, dessen Parameter sich während der Ausbreitung ändern, weil sie durch eine externe Pumpe moduliert werden, entstand das Modell des parametrischen Pulsgenerators (PPG) /16/.

Bei diesem Modell des PPG stellt man sich vor, daß den Solitonen, die im System durch die unvermeidbare Dämpfung Verluste erleiden, durch eine Pumpwelle, die in die gleiche Richtung läuft, Energie zugeführt wird. Für eine KdV-Gleichung mit zusätzlichen Verlusten und Inhomogenitäten wurden verschiedene stabile Gleichgewichtszustände berechnet, die stabilen, sich in Synchronisation mit einer Pumpwelle fortbewegenden Solitonen entsprechen /16/. Dieses Gleichungssystem hat die gleiche Form, wie die Gleichungen, die ein Teilchen in einem Zyklotron beschreiben.

Auch ohne ein solches Gleichungssystem hier explizit zu berechnen, kann man doch Aussagen über die möglichen Lösungen machen. Das soll hier am Beispiel

des Ringresonators geschehen, weil die Analogie zum Zyklotron evident ist. Die eingekoppelte Welle kann sich nur in einer Richtung ausbreiten, es treten keine räumlichen Effekte durch gegenläufige Wellen auf.

Ein Ringresonator ist in Resonanz, wenn seine Länge einem ganzzahligen Vielfachen  $N$  der Wellenlänge entspricht. Es befinden sich also gerade  $N$  Wellenlängen im Resonator, nach  $N$  zeitlichen Perioden der anregenden Frequenz  $f$  ist der Ring gerade einmal durchlaufen worden. Bei der Ordnung  $N = 4$  zum Beispiel dauert ein Umlauf der Pumpwelle gerade vier Perioden der Anregungsfrequenz. Befindet sich jetzt ein stabiles Soliton im Resonator, so dauert dessen Umlauf, der ja mit dem der Pumpwelle synchronisiert ist, ebenfalls vier zeitliche Perioden der Anregungsfrequenz, es liegt Frequenzviertelung vor!

Untersucht man an einer beliebigen Stelle des Ringresonators den zeitlichen Verlauf der Wellenform, so wird man die vier Perioden der Pumpwelle beobachten, die sich nach jedem Umlauf wiederholen. Einer dieser vier Perioden ist allerdings das Soliton überlagert. Man beobachtet also dreimal eine niedrige Amplitude (der Pumpwelle) und einmal eine größere Amplitude (von Pumpwelle mit Soliton) und das immer wieder, bei jedem Umlauf. Man könnte diesen Zustand durch das Bitmuster 1 0 0 0 beschreiben, wobei die 1 bedeuten soll, es befindet sich ein Soliton auf der Pumpwelle und die 0, es befindet sich kein Soliton auf der Pumpwelle. Dabei ist es gleichgültig, das heißt nicht unterscheidbar, in welcher Periode der Pumpwelle sich das Soliton befindet. Das bedeutet aber, die Bitmuster

1 0 0 0 ,  
0 1 0 0 ,  
0 0 1 0 und  
0 0 0 1 ,

die durch zyklische Vertauschung auseinander hervorgehen, sind identisch, weil die Perioden der Pumpwelle nicht zu unterscheiden sind. Anders ausgedrückt, durch die Periodizität ergeben alle diese Bitmuster bei mehrfacher Hintereinanderreihung die gleiche Wellenform:

. . . 0 1 0 0 0 1 0 0 0 1 0 0 0 1 0 . . . .

Befinden sich jetzt zwei stabile Solitonen im Resonator, denen beiden durch die Pumpwelle parametrisch Energie übertragen wird, so durchläuft auch hierbei jedes Soliton innerhalb von vier Perioden der Anregungsfrequenz einmal den Ring. Wenn die Solitonen auf zwei aufeinanderfolgenden Perioden der Pumpwelle sitzen, so läßt sich das - analog zu oben - durch das Bitmuster 1 1 0 0 ausdrücken. Wiederum sind die Bitmuster

1 1 0 0 ,  
0 1 1 0 ,  
0 0 1 1 und  
1 0 0 1

identisch, da sie durch zyklische Vertauschung auseinander hervorgehen und somit die gleiche Wellenform repräsentieren:

. . . 0 1 1 0 0 1 1 0 0 1 1 0 0 1 . . . .

Da sich die Wellenform erst alle vier Perioden wiederholt, liegt auch bei diesem Zustand 1 1 0 0 eine Frequenzviertelung vor.

Man erkennt aber sofort, daß sich die beiden Solitonen genauso gut auf zwei Perioden der Pumpwelle befinden können, die durch eine weitere Periode getrennt sind, entsprechend dem Bitmuster 1 0 1 0 . Dieses Bitmuster ist in sich schon periodisch, weil nicht nur die Perioden der Pumpwelle, sondern auch die Solitonen ununterscheidbar sind. Das drückt sich auch darin aus, daß es zum Zustand 1 0 1 0 nur ein identisches Bitmuster gibt

1 0 1 0 und  
0 1 0 1 ,

welches zur gleichen Wellenform führt:

. . . 1 0 1 0 1 0 1 0 1 0 1 0 1 0 1 . . . .

Diese Wellenform wiederholt sich schon nach zwei Perioden der Pumpfrequenz, es tritt also eine Halbierung der Frequenz auf. Wir haben hier eine Entartung des Zustandes " Zwei Solitonen im Resonator " durch die Anordnungsmöglichkeiten der beiden Solitonen gefunden ! Diese Tatsache wird auch sofort deutlich, wenn man sich den Ringresonator als Kreis mit vier Plätzen für die vier Pumpperioden vorstellt:

1	0	0	1	
0 1	0 1	1 0	1 0	
0	1	1	0	
1.Periode	2.Periode	3.Periode	4.Periode	usw. wie vorne

1	0	
0 0	1 1	
1	0	
1.Periode	2.Periode	usw. wie vorne

Wenn nach jeder Pumpperiode um einen Platz weitergerückt wird, sind die obigen Periodizitäten unmittelbar einsichtig.

Der Zustand "Drei Solitonen im Resonator" wird durch das Bitmuster 1 1 1 0 ausgedrückt, alle anderen Anordnungen

0 1 1 1 ,  
1 0 1 1 und  
1 1 0 1

führen zur gleichen Wellenform. Da sich die Wellenform erst nach vier Perioden der Pumpfrequenz wiederholt, liegt Frequenzviertelung vor.

Anders verhält es sich mit dem Zustand "Vier Solitonen im Resonator", wenn also jede der vier Perioden der Pumpwelle im Resonator ein Soliton transportiert, ist die Periode der Wellenform gleich der Pumpperiode.

Es gibt also fünf verschiedene stabile Gleichgewichtszustände, die sich durch die Anzahl und Anordnung der Solitonen im Resonator unterscheiden. Berücksichtigt man noch zusätzlich die triviale Lösung "Kein Soliton im Resonator", so gibt es bei der Ordnung  $N = 4$  der Resonanz sechs mögliche Zustände, die sich durch die folgenden Bitmuster darstellen lassen:

0 0 0 0  
1 0 0 0  
1 1 0 0  
1 0 1 0  
1 1 1 0  
1 1 1 1

Der Vergleich mit der experimentellen Übertragungskennlinie (Abb. 2.2.1.1) be-

stätigt diese Überlegungen, denn auch dort wurden sechs verschiedene stabile Zustände beobachtet. Die dort gemessenen Frequenzspektren stimmen sogar mit den hier beobachteten Fällen von Periodizität überein: Neben zwei Zuständen mit der Periodizität der Pumpfrequenz (Zustand 1 und 6, bzw. Bitmuster 0 0 0 0 und 1 1 1 1) gibt es drei Fälle von Frequenzviertelung (Zustand 2, 3 und 5, bzw. Bitmuster 1 0 0 0, 1 1 0 0 und 1 1 1 0) und in einem Fall Frequenzhalbierung (Zustand 4 und Bitmuster 1 0 1 0)!

Es ist deswegen von großem Interesse, allgemein angeben zu können, wie groß die Anzahl  $A$  der möglichen Zustände bei einer Resonanz der Ordnung  $N$  ist. Aus der Kombinatorik ist bekannt, daß es bei zum Beispiel  $N$  Münzenwürfen (Pumpperioden), wo ja zwei Ereignismöglichkeiten "Kopf" (Soliton auf Pumpwelle) oder "Zahl" (nur Pumpwelle) existieren,  $2^N$  verschiedene Möglichkeiten von Ereigniskombinationen (Anordnungen) gibt.

z.B.: Kopf Zahl Kopf (entspricht 1 0 1)

Da hier aber alle Möglichkeiten, die durch zyklisches Vertauschen ineinander übergehen, identisch sind, müssen sie als eine Möglichkeit gezählt werden. Bei  $N$  zur Verfügung stehenden Plätzen kann eine Anordnungsmöglichkeit gerade  $N$ -mal zyklisch vertauscht werden, bis sie wieder in sich selbst übergeht.

z.B.: 1 0 1      1 1 0      0 1 1      usw. wie vorne  
1.Vert.      2.Vert.      3.Vert.

Die Anzahl der wirklichen Möglichkeiten wird dadurch von  $2^N$  auf  $\frac{2^N}{N}$  verringert. Die beiden Möglichkeiten  $N$ -mal Kopf (1 1 1) und  $N$ -mal Zahl (0 0 0) können nicht zyklisch vertauscht werden, sie müssen also vor der Reduzierung subtrahiert und danach wieder addiert werden:

$$A = \frac{2^N - 2}{N} + 2$$

Diese Formel gilt aber nur, wenn  $N$  eine Primzahl ist, und dadurch weitet sich dieses Problem von der Kombinatorik auf die Zahlentheorie aus. Ist  $N$  nämlich keine Primzahl, so gibt es Anordnungsmöglichkeiten, die nicht nach  $N$ -maliger,



sondern schon nach d-maliger zyklischer Vertauschung in sich selbst übergehen, wobei d ein Teiler von N ist. Ein Beispiel dafür haben wir bei N = 4 mit dem Teiler d = 2 schon gesehen:

1 0 1 0      0 1 0 1      usw. wie vorne  
1.Vert.      2.Vert.

Die Anzahl aller Möglichkeiten bei einer beliebigen Zahl N ist  $2^N$  und setzt sich zusammen aus der Summe aller Möglichkeiten mit der Periodizität d, wobei d Teiler von N ist.

z.B.: N = 4 ergibt  $2^4 = 16$  Möglichkeiten, nämlich:

Teiler d=1 mit 2 Möglichkeiten

0 0 0 0      1 1 1 1

Teiler d=2 mit 2 Möglichkeiten

1 0 1 0  
0 1 0 1

Teiler d=4 mit 12 Möglichkeiten

1 0 0 0      1 1 0 0      1 1 1 0  
0 1 0 0      0 1 1 0      0 1 1 1  
0 0 1 0      0 0 1 1      1 0 1 1  
0 0 0 1      1 0 0 1      1 1 0 1

Allgemein kann man dies folgendermaßen schreiben:

$$\sum_d f(d) = 2^N \quad (3.1.1)$$

also hier:  $f(1) + f(2) + f(4) = 2^4$   
 $2 + 2 + 12 = 16$

Dabei bedeutet das Zeichen  $\sum_d$  : Aufsummierung über alle Teiler d der

Zahl N , wobei die f(d) die Menge aller Anordnungsmöglichkeiten mit der Periodizität d darstellen.

Die wirkliche Anzahl A der Möglichkeiten bei einer beliebigen Zahl N - also die Anzahl der möglichen Zustände bei der Ordnung N der Resonanz - ergibt

sich jetzt durch Aufsummierung der durch den Teiler  $d$  ( die Periode ) reduzierten Möglichkeiten  $f(d)$ :

$$A(N) = \sum_d \frac{f(d)}{d} \quad (3.1.2)$$

$$\begin{aligned} \text{also hier: } A(4) &= \frac{f(1)}{1} + \frac{f(2)}{2} + \frac{f(4)}{4} = \\ &= \frac{2}{1} + \frac{2}{2} + \frac{12}{4} = 6 \end{aligned}$$

Verwendet man an Stelle der Gl.(3.1.1) die sogenannte Möbius-Umkehrung Gl.(3.1.3), so kann man - mathematisch eleganter - eine explizite Gleichung für die  $f(d)$  angeben. Seien  $q$  wiederum alle Teiler der Zahl  $d$ , so gilt:

$$f(d) = \sum_q \mu(q) \cdot 2^{d/q} \quad , \quad (3.1.3)$$

wobei

$$\mu(q) = \begin{cases} 1 & \text{für } q=1 \\ (-1)^r & \text{für quadratfreies } q \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

die zahlentheoretische Möbius-Funktion ist.  $r$  ist hierbei die Anzahl der Primfaktoren von  $q$ . Mit quadratfrei ist gemeint, daß bei der Primfaktorzerlegung von  $q$  kein Primfaktor mehrmals auftreten darf. So ist zum Beispiel  $6=2 \cdot 3$  quadratfrei und  $12=2 \cdot 2 \cdot 3$  nicht. Als Beispiel für die Anwendung der Gl.(3.1.2) wird hier die maximale Anzahl der Zustände bei der Ordnung  $N = 8$  der Resonanz berechnet:

$$\begin{aligned} A(8) &= \sum_d \frac{f(d)}{d} = \\ &= \frac{f(1)}{1} + \frac{f(2)}{2} + \frac{f(4)}{4} + \frac{f(8)}{8} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{mit} \quad f(1) &= \mu(1) \cdot 2^{1/1} = 1 \cdot 2 = \underline{2} \\ f(2) &= \mu(1) \cdot 2^{2/1} + \mu(2) \cdot 2^{2/2} = \\ &= 1 \cdot 2^2 - 1 \cdot 2^1 = \underline{2} \\ f(4) &= \mu(1) \cdot 2^{4/1} + \mu(2) \cdot 2^{4/2} + \mu(4) \cdot 2^{4/4} = \\ &= 1 \cdot 2^4 - 1 \cdot 2^2 + 0 = \underline{12} \end{aligned}$$

und 
$$f(8) = \mu(1) \cdot 2^{8/1} + \mu(2) \cdot 2^{8/2} + \mu(4) \cdot 2^{8/4} + \mu(8) \cdot 2^{8/8} =$$

$$= 1 \cdot 2^8 - 1 \cdot 2^4 + 0 + 0 = \underline{240}$$

Also folgt:

$$A(8) = \frac{2}{1} + \frac{2}{2} + \frac{12}{4} + \frac{240}{8} = \underline{36}$$

Bei einer Resonanz der Ordnung  $N = 8$  gibt es 36 verschiedene stabile Gleichgewichtszustände, die sich durch die Anzahl und die Anordnungsmöglichkeiten der Solitonen im Resonator unterscheiden!

Wie am Beispiel deutlich zu erkennen war, handelt es sich um ein rekursives Verfahren. Dabei ist es gleichgültig, ob zur Berechnung der  $f(d)$  die explizite Gl.(3.1.3) - wie im Beispiel - oder die implizite Gl. (3.1.1) verwendet wird. Um  $A(8)$  berechnen zu können, müssen  $f(4)$ ,  $f(2)$  und  $f(1)$  vorher bestimmt werden. Dadurch sind auch  $A(4)$  und  $A(2)$  im Prinzip berechnet.

Da die Gleichung für die Anzahl der Zustände als wichtigsten Ausdruck eine Exponentialfunktion  $2^N$  enthält, nimmt diese Anzahl mit steigender Ordnung  $N$  sehr schnell zu. Das verdeutlicht auch die folgende Tabelle:

Ordnung N	Anzahl A
1	2
2	3
3	4
4	6
5	8
6	14
7	20
8	36
9	60
10	108
15	2192
20	52488
40	$1,09951058 \cdot 10^{12}$

Die Gl.(3.1.2) und Gl.(3.1.1) oder Gl.(3.1.3) ermöglichen die Berechnung der Anzahl der Zustände  $A(N)$  bei einer Ordnung  $N$  der Resonanz, erlauben aber keine Aussage über die Anordnungsmöglichkeiten einer bestimmten Anzahl  $K$  von Solitonen bei gegebener Ordnung  $N$ . So kann im obigen Beispiel  $A(N) = 36$  berechnet werden, aber es ist nicht bekannt, wieviele Zustände  $E(N,K)$  mit  $K$  Solitonen möglich sind. Im folgenden wird daher ein Ausdruck für den Entartungsgrad  $E(N,K)$

angegeben werden. Weil die Gesamtzahl aller Möglichkeiten  $K$  Solitonen auf  $N$  Perioden zu verteilen  $\binom{N}{K}$  ist, kann mit Überlegungen, die analog zur Herleitung der Gl.(3.1.1) und Gl.(3.1.2) sind, der Entartungsgrad  $E$  ebenfalls allgemein angegeben werden:

$$E(N,K) = \begin{cases} 1 & , \text{ für } K=0 \text{ oder } K=N \\ \sum_t Q(N/t;K/t) & , \text{ sonst} \end{cases} \quad (3.1.4)$$

wobei  $t$  alle gemeinsamen Teiler von  $N$  und  $K$  sind. Die  $Q(N/t;K/t)$  sind hier die Menge der reduzierten Anordnungsmöglichkeiten mit der Periodizität  $\frac{N}{t}$  von  $K$  Solitonen bei der Ordnung  $N$  der Resonanz. Multipliziert man diese  $Q(N/t;K/t)$  mit ihrer Periode  $\frac{N}{t}$  und summiert über alle möglichen Periodizitäten auf, so erhält man wieder die Gesamtzahl aller Möglichkeiten  $\binom{N}{K}$ :

$$\binom{N}{K} = \sum_t \frac{N}{t} \cdot Q(N/t;K/t) \quad (3.1.5)$$

Als Beispiel soll hier die Anzahl  $E(N,K)$  der Möglichkeiten  $K = 4$  Solitonen bei der Ordnung  $N = 8$  der Resonanz anzuordnen bestimmt werden.

$$\begin{aligned} E(8,4) &= Q(8/1;4/1) + Q(8/2;4/2) + Q(8/4;4/4) = \\ &= Q(8,4) + Q(4,2) + Q(2,1) \end{aligned}$$

Jetzt müssen die noch unbekanntes  $Q(8/t;4/t)$  mit Gl. (3.1.5) berechnet werden:

$$\begin{aligned} \binom{8}{4} &= 70 = \frac{8}{1} \cdot Q(8/1;4/1) + \frac{8}{2} \cdot Q(8/2;4/2) + \frac{8}{4} \cdot Q(8/4;4/4) = \\ &= 8 \cdot Q(8,4) + 4 \cdot Q(4,2) + 2 \cdot Q(2,1) \end{aligned}$$

Auch hierbei handelt es sich um ein rekursives Verfahren, zunächst müssen mit Gl.(3.1.5)  $Q(4,2)$  und  $Q(2,1)$  bestimmt werden:

$$\begin{aligned} \binom{4}{2} &= 6 = \frac{4}{1} \cdot Q(4/1;2/1) + \frac{4}{2} \cdot Q(4/2;2/2) = \\ &= 4 \cdot Q(4,2) + 2 \cdot Q(2,1) \end{aligned}$$

$$\binom{2}{1} = 2 = \frac{2}{1} \cdot Q(2/1;1/1) = 2 \cdot Q(2,1)$$

Daraus folgt  $Q(2,1) = 1$  und damit  $Q(4,2) = \frac{6-2}{4} = 1$ . Dann ist

$Q(8,4) = \frac{70-4 \cdot 1-2 \cdot 1}{8} = 8$  und deshalb mit Gl.(3.1.4) der Entartungsgrad:

$$E(8,4) = Q(8,4) + Q(4,2) + Q(2,1) = 8 + 1 + 1 = 10$$

Der Fall "Vier Solitonen im Resonator" bei der Ordnung  $N = 8$  ist also in zehn Zustände entartet !

### 3.2 Experimentelle Ergebnisse

In diesem Abschnitt wird das Konzept des PPG und die daraus abgeleiteten Aussagen über die Anzahl der möglichen Gleichgewichtszustände überprüft, indem mit dem in Abschnitt 2.1 beschriebenen Meßaufbau Kennlinien aufgenommen werden. Dabei wird zusätzlich die Tastspitze eines Vektorvoltmeters als Sonde benutzt, um die Wellenform im Resonator zu untersuchen. Im Ringresonator wird die Tastspitze problemlos in einem Durchführungsadapter (Fünfzig Ohm) in den Ring integriert, beim Fabry-Perot Resonator kann sie als kapazitive Sonde mit Hilfe eines Schlittens im konstanten Abstand von der Leitung innerhalb des gesamten Resonators verschoben werden. Das Vektorvoltmeter untersetzt die detektierte hochfrequente Amplitude in ein entsprechendes 20 kHz-Signal, bzw. in dessen Harmonische und Subharmonische. Dadurch kann das Bild der Welle auf einem Oszillographenschirm auf einer anderen Zeitskala betrachtet werden.

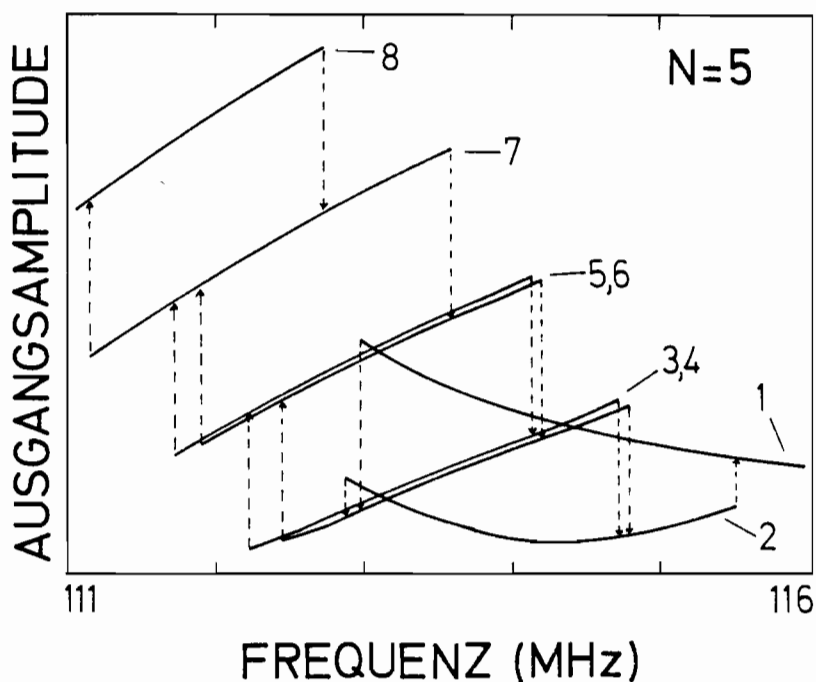


Abb.3.2.1  
Resonanzkurve des Ringresonators, Ausgangsamplitude selektiv bei der Frequenz  $f$  der anregenden Welle gemessen

Die Abb. 3.2.1 zeigt eine Resonanzkurve der Ordnung  $N = 5$  des Ringresonators, bei der selektiv die transmittierte Amplitude bei der Frequenz der anregenden Welle gemessen und gegen die Anregungsfrequenz aufgetragen wurde. Es werden sechs Stufen der Transmission beobachtet, von denen die beiden mittleren zweifach entartet sind, so daß insgesamt - wie erwartet - acht verschiedene Zustände existieren.

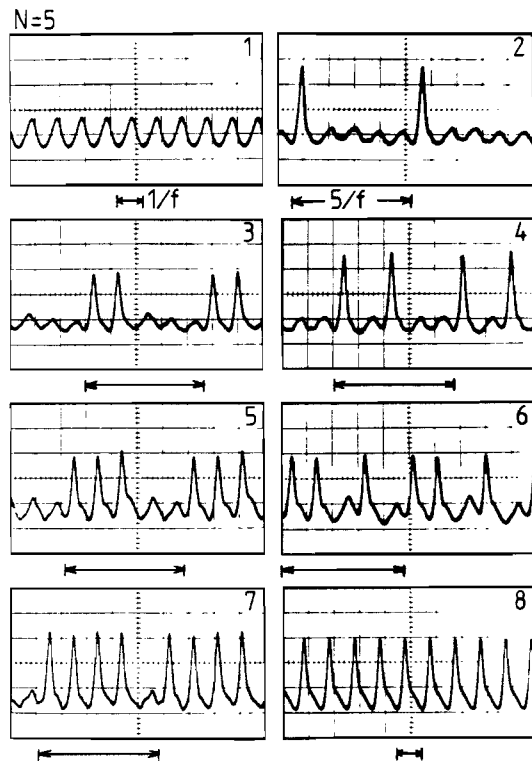


Abb. 3.2.2

Zeitliche Wellenformen der Zustände 1 - 8 der Resonanzkurve  $N = 5$  des Ringresonators

Abb. 3.2.2 zeigt die in diesen acht Zuständen detektierten Wellenformen, die sich jeweils nach der Periode  $1/f$  oder  $5/f$  - Frequenzfünftelung - wiederholen. Jede Stufe der Transmission entspricht einer unterschiedlichen Anzahl von Solitonen im Resonator, eine Entartung einer Stufe wird durch die unterschiedliche Anordnung der gleichen Anzahl von Solitonen im Resonator verursacht (Zustände 5 und 6, bzw. 3 und 4). Hierin ist auch begründet, daß die beiden Zustände maximaler und minimaler Transmission ( $N$  und  $N-1$ , bzw. 1 und 2) niemals entartet sein können.

Interessant ist die Tatsache, daß alle Hystereseschleifen nach Detektion der Zustände 1,2,3,5,7 und 8 geschlossen waren. Die mittleren Stufen waren nicht entartet, das System sprang erst durch eine sehr schnelle und relativ große

Änderung der Frequenz im Bereich der mittleren Stufen in den Zustand 4 und 6. Diese beiden Zustände bilden eine ebenfalls geschlossene Hystereseschleife.

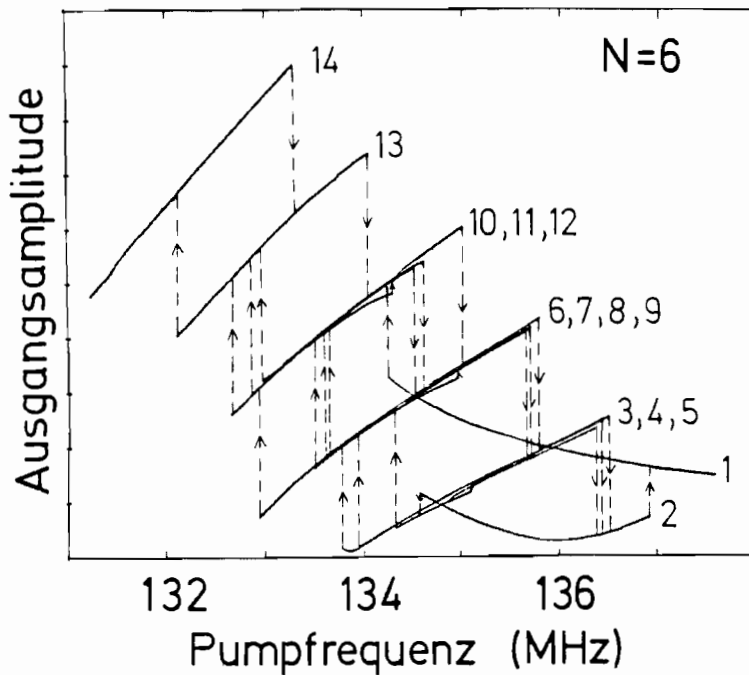


Abb. 3.2.3  
Resonanzkurve des Ringresonators, Amplitude selektiv bei der Anregungsfrequenz gemessen

Die Abb. 3.2.3 zeigt eine Resonanzkurve des Ringresonators, die bei eingestellten Parametern gemessen wurde, die identisch mit jenen der Abb. 2.2.2.4 waren. Auch hier existieren, wie die Gl.(3.1.2)und(3.1.3)vermuten lassen, vierzehn verschiedene Zustände, von denen aber die Zustände 5,8 und 12, wie man durch Vergleich mit der Abb. 2.2.2.4 erkennt, nicht nach Ausnutzung aller möglichen,verschiedenen Vorgeschichten des Systems durch Hysterese, eingestellt waren. Es ergibt sich also das Problem, daß manche Zustände nicht sofort, sondern erst nach - beispielsweise - einer schnellen Frequenzänderung eingestellt werden können.

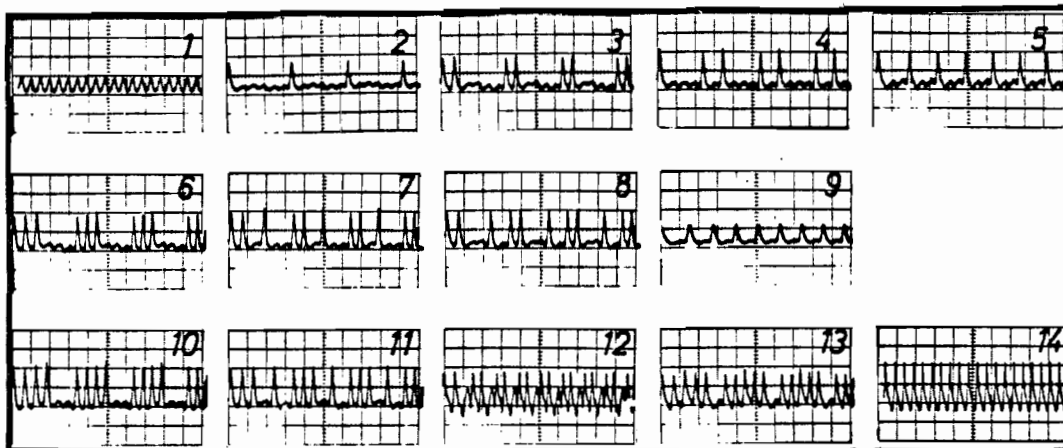


Abb. 3.2.4 Zeitliche Wellenform der Zustände 1 - 14 der Resonanzkurve N=6 des Ringresonators

Wie man an den zu den Zuständen gehörenden Wellenformen (Abb. 3.2.4) erkennt, kann bei dieser Ordnung  $N = 6$  nicht nur Frequenzsechstelung, sondern auch Frequenzdrittelnung (Zustände 5 und 12) und Frequenzhalbierung (Zustand 9) auftreten.

Abb. 3.2.5 zeigt eine im doppelt-logarithmischen Maßstab aufgetragene Übertragungskennlinie des Fabry-Perot Resonators der Ordnung  $N = 5$  .

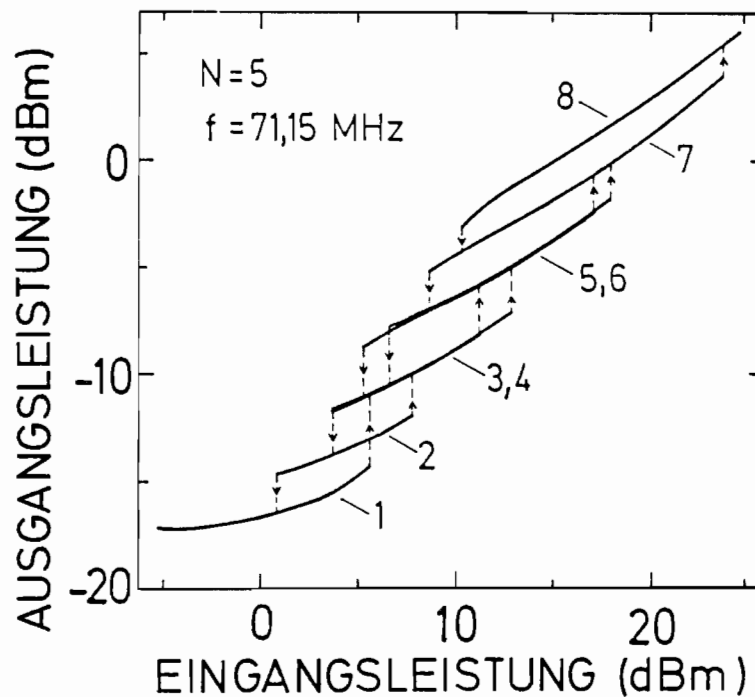


Abb. 3.2.5 Übertragungskennlinie des Fabry-Perot Resonators im doppelt-logarithmischen Maßstab

Durch die doppelt-logarithmische Auftragung werden die sonst sehr eng beieinander liegenden Hystereseschleifen der niedrigen Transmissionsstufen entzerrt. Auch hier liegen wie bei Abb. 3.2.1 alle acht möglichen Zustände vor, hier werden aber alle durch die ineinander verschachtelten Hystereseschleifen eingestellt. Diese Kennlinie ist - z.B. bei ungefähr 11dBm Leistung der anregenden Welle - sexstabil. Dort sind je nach Vorgeschichte des Resonators die Zustände 3,4,5,6,7 oder 8 einstellbar!

Im folgenden soll versucht werden, das Konzept der Solitonen im Ringresonator, wie es aus dem Modell des parametrischen Pulsgenerators abgeleitet wurde,



auch auf den Fabry-Perot Resonator zu übertragen. Das ist plausibel, weil die Kennlinien von Fabry-Perot und Ringresonator stets vergleichbar waren. Deswegen erwartet man, daß sich (bei der Ordnung  $N = 5$ ) im Zustand 2 - dem Bitmuster 1 0 0 0 0 entsprechend - wie beim Ringresonator nur ein Soliton auf den fünf Perioden der Pumpwelle befindet, die in der Gesamtlänge des Fabry-Perot Resonators gleichzeitig hin- und rücklaufen. Die geometrische Länge des Resonators entspricht allerdings nicht fünf Wellenlängen der Anregungsfrequenz, sondern nur  $5 \cdot \frac{\lambda}{2}$  .

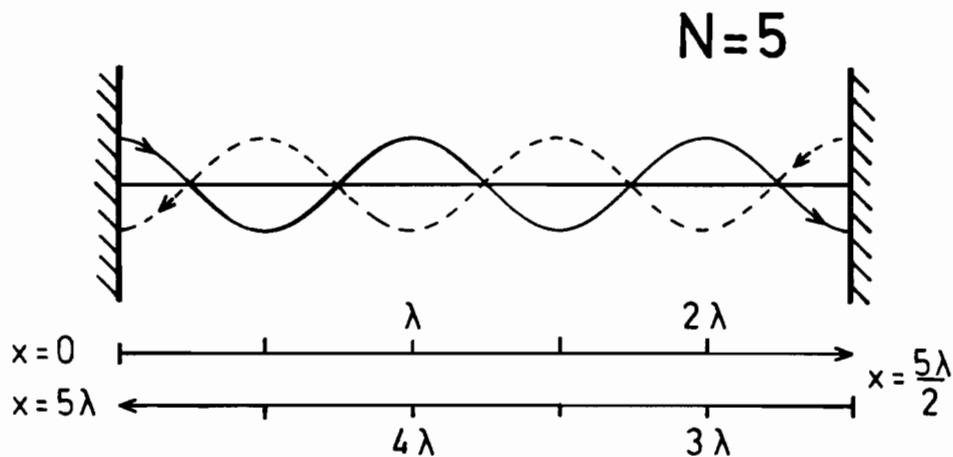


Abb. 3.2.6 Gegenläufige Wellen im Kleinsignalfall im Fabry-Perot Resonator bei der Ordnung  $N = 5$  der Resonanz

Hier wird die Vorstellung des PPG verwendet, daß nur in die gleiche Richtung laufende Wellen wechselwirken. Befindet sich das Soliton am linken Spiegel, so wird es innerhalb von zweieinhalb Perioden der Pumpfrequenz vom linken zum rechten Spiegel und in ebenfalls zweieinhalb Pumpperioden zurücklaufen, so daß es sich nach genau fünf Perioden wieder am linken Spiegel befindet. Beobachtet man also am linken Spiegel ( $x = 0$ ) die zeitliche Wellenform, so wird man folgende Periodizität sehen:

. . . 0 1 0 0 0 0 1 0 0 0 0 1 0 0 0 0 1 0 0 0 . . .

Dasselbe gilt selbstverständlich dann auch für die Wellenform, die man am rechten Spiegel ( $x = \frac{5}{2} \lambda$ ) beobachten kann.

Wählt man als Beobachtungsort jetzt einen der beiden Punkte, die sich eine

halbe Wellenlänge von einem der beiden Spiegel entfernt befinden ( $x = \frac{\lambda}{2}$  oder  $x = 2\lambda$ ), so sieht man eine andere zeitliche Periodizität der Wellenform: Vom Ort  $x = \frac{\lambda}{2}$  dauert es zwei Perioden der Pumpfrequenz, bis das von links nach rechts laufende Soliton am rechten Spiegel reflektiert und nochmal zwei Perioden, bis es wieder am Ort  $x = \frac{\lambda}{2}$  angekommen ist, insgesamt also vier Perioden. Anschließend dauert es aber nur zweimal eine halbe Periode, bis es nach Reflexion am linken Spiegel wieder am gleichen Ort  $x = \frac{\lambda}{2}$  ist. Die zeitliche Periodizität - des gleichen Zustandes "Ein Soliton im Resonator" - am Ort  $x = \frac{\lambda}{2}$  ( und entsprechend  $x = 2\lambda$  ) sieht also so aus:

. . . 1 0 0 0 1 1 0 0 0 1 1 0 0 0 1 1 0 . . . !

Aus entsprechenden Gründen sieht die zeitliche Periodizität der Wellenform des gleichen Zustandes 2 (Bitmuster 1 0 0 0 0 ) an den Orten  $x = \lambda$  und  $x = \frac{3}{2}\lambda$  so aus:

. . . 0 1 0 0 1 0 1 0 0 1 0 1 0 0 1 0 1 . . .

Die Abb. 3.2.7 zeigt die am Ort  $x = 0$  des Fabry-Perot beobachteten Wellenformen, die auch zu den Zuständen 1 - 8 der Abb. 3.2.5 gehören.

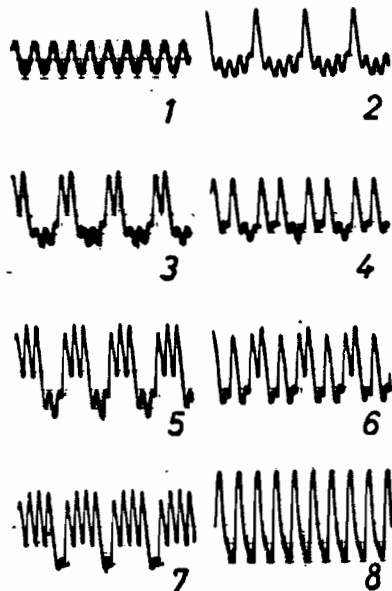


Abb. 3.2.7

Zeitliche Wellenform der Zustände 1 - 8 der Übertragungskennlinie der Ordnung  $N = 5$  des Fabry-Perot Resonators am Ort  $x = 0$

Weil an den Spiegeln - wie oben erläutert - keine räumlichen Effekte auftreten und dort die gleichen Wellenformen wie beim Ringresonator beobachtet werden, scheinen bei Fabry-Perot und Ringresonator die gleichen Zustände vorzuliegen!

Abb. 3.2.8 zeigt die am Ort  $x = \frac{\lambda}{2}$  und  $x = \lambda$  beobachteten Wellenformen, als sich der Resonator im Zustand 2 ( Bitmuster 1 0 0 0 0 ) befand, und bestätigt dadurch die Diskussion der räumlichen Effekte.

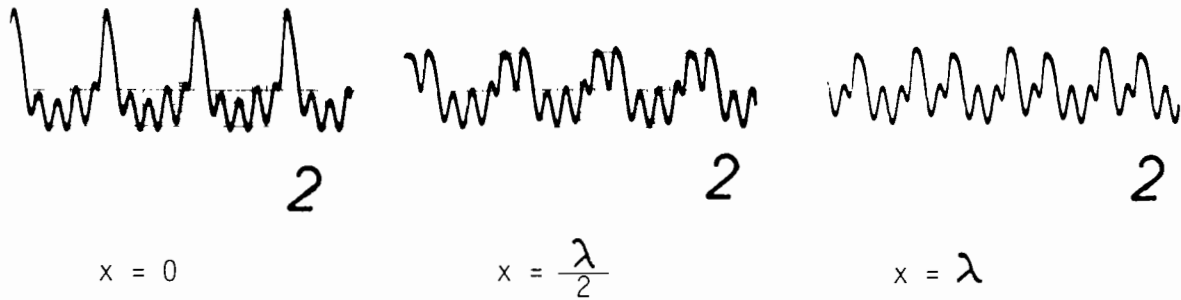


Abb. 3.2.8 Zeitliche Wellenform des Zustandes 2 der Ordnung  $N = 5$  des Fabry-Perot Resonators an verschiedenen Orten

An anderen Orten ergeben sich - auch durch die nichtlineare Überlagerung von mehreren Solitonen oder eines Solitons mit der negativen Halbwelle der Pumpperiode - entsprechend komplizierte Wellenformen. Abb. 3.2.9 zeigt die vom Zustand 7 (Bitmuster 1 1 1 1 0 ) an den Orten  $x = \frac{\lambda}{4}$  und  $x = \frac{3\lambda}{4}$  verursachte Wellenform.

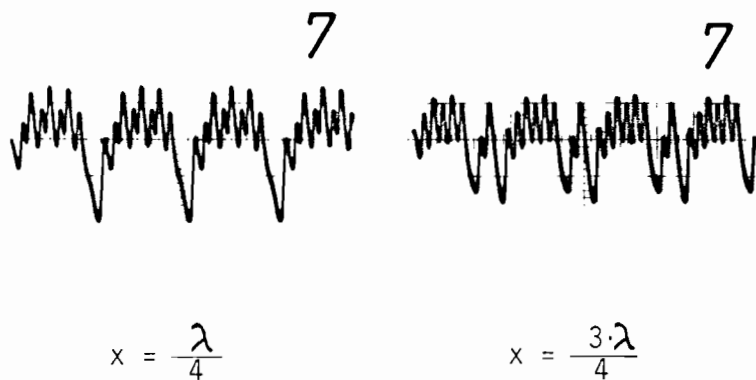


Abb. 3.2.9 Zeitliche Wellenform des Zustandes 7 der Ordnung  $N = 5$  des Fabry-Perot Resonators an verschiedenen Orten

Die Abb. 3.2.10 zeigt wiederum eine Resonanzkurve der Ordnung  $N = 5$  des Ringresonators. Im Gegensatz zu Abb. 3.2.1 ist allerdings die gesamte transmittierte Leistung aufgetragen und eine größere konstante Leistung der anregenden Welle verwendet worden. Diese Kurve zeigt die Resonanz der Ordnung  $N = 5$  mit ihrer zugehörigen Vorresonanz ( vgl. Abb. 2.2.2.5 ). Es wurde festgestellt, daß die Wellenformen der Zustände 1 - 8 mit denjenigen der Abb. 3.2.2 identisch sind,

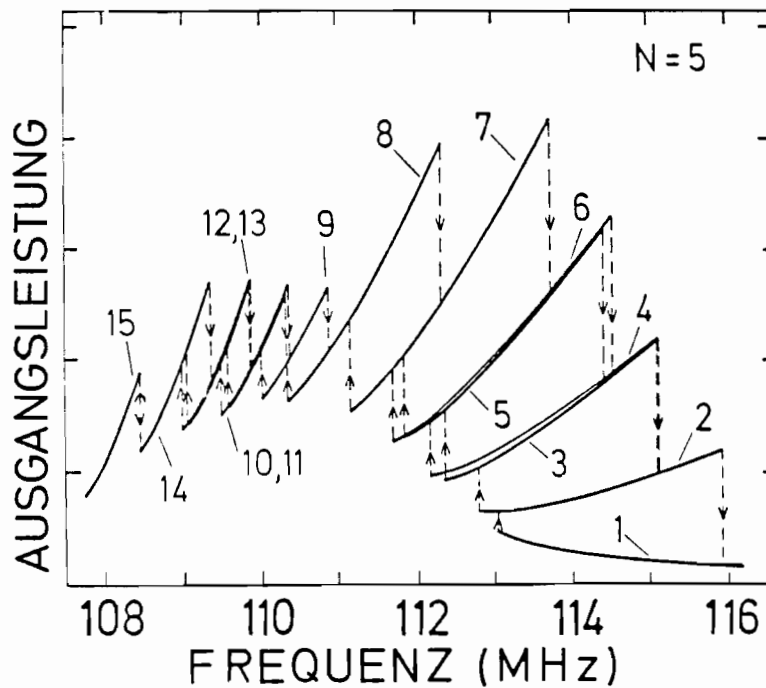


Abb. 3.2.10 Resonanzkurve des Ringresonators mit Vorresonanz

allerdings wurden bei dieser Messung mit größerer anregender Leistung auch die Zustände 4 und 6 durch die entsprechend ineinander verschachtelten Hystereseschleifen erreicht. Die in den Zuständen 9 - 15 der Vorresonanz detektierten Wellenformen der transmittierten Welle zeigt Abb. 3.2.11 :

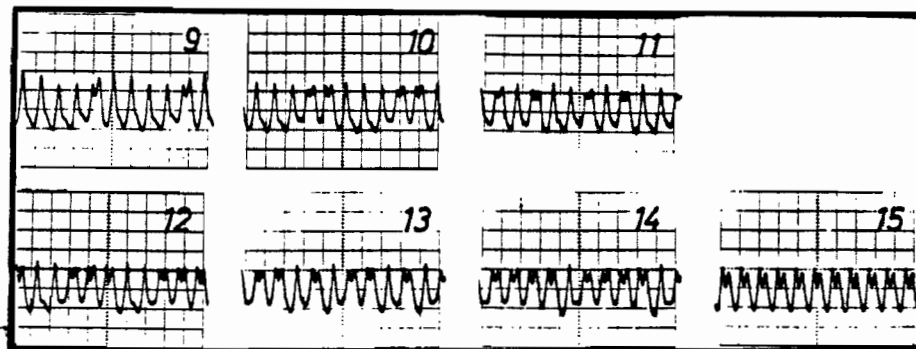


Abb. 3.2.11 Zeitliche Wellenform der Zustände 9 - 15 der Vorresonanz der Resonanzkurve der Ordnung  $N = 5$  des Ringresonators

Die Vorresonanz wird vermutlich durch die stabilen Gleichgewichtszustände des PPG erklärt, bei denen die Pumpwelle sogar auf zwei Solitonen Energie übertragen kann. Die Systemparameter sind so, daß auf mehr als fünf Solitonen

Energie zum Ausgleich der Dämpfung übertragen wird. Weil sich die fünf Perioden aber nicht unterscheiden, ist es anscheinend auch nicht möglich, daß eine Periode der Pumpwelle zwei Solitonen trägt, während sich in einer anderen Periode kein Soliton befindet. Beschreibt man die Zustände 9 - 15 konsequenterweise mit den Bitmustern 2 1 1 1 1, 2 2 1 1 1, 2 1 2 1 1, 2 2 2 1 1, 2 2 1 2 1, 2 2 2 2 1 und 2 2 2 2 2, so hat man zusammen mit dem Grundzustand dieser Vorresonanz, dem Zustand 8 ( Bitmuster 1 1 1 1 1 ), wieder insgesamt acht mögliche Zustände der Vorresonanz, die vollkommen analog zu denen der Hauptresonanz sind.

Prinzipiell ist jetzt auch der Fall denkbar, daß sich drei oder noch mehr Solitonen auf einer Pumpperiode befinden. Bei der Ordnung  $N = 3$  des Ringresonators wurden drei komplette Vorresonanzen beobachtet, das heißt alle Zustände vom Bitmuster 0 0 0 bis zum Bitmuster 4 4 4 ! Ein Zustand wie zum Beispiel 4 2 3 wurde nie beobachtet. Einige der Wellenformen dieser Zustände sind als Beispiel in der Abb. 3.2.12 dargestellt.

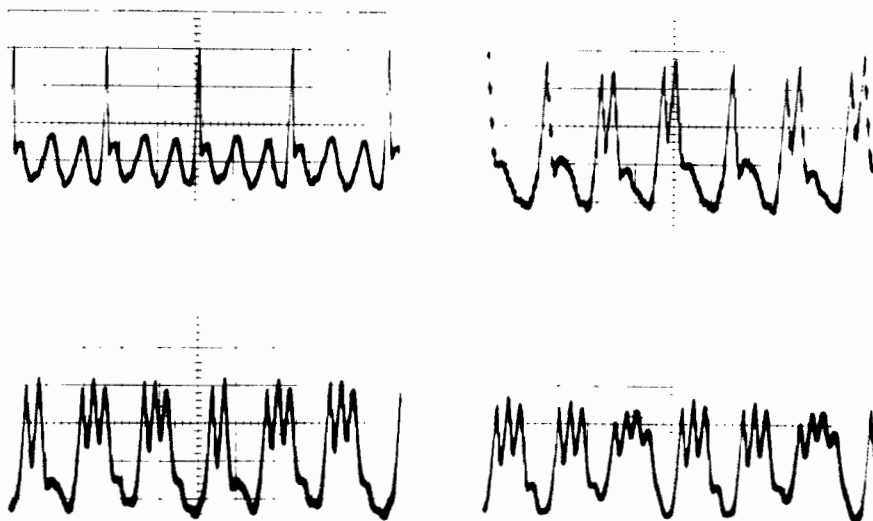


Abb. 3.2.12 Beispiele für die zeitliche Wellenform der Haupt- und Vorresonanzen der Ordnung  $N = 3$  des Ringresonators (Bitmuster 1 0 0, 2 2 1, 3 3 2 und 4 3 3 )

Verallgemeinernd könnte man die unmittelbar einsichtige Gl.(3.2.1) für die Gesamtzahl  $G$  aller möglichen Zustände einer Resonanz der Ordnung  $N$  mit  $M$  Vorresonanzen dann so schreiben :

$$G = (M + 1) \cdot (A(N) - 1) + 1 \quad (3.2.1)$$

Abschließend sollte noch ein interessanter beobachteter Effekt erwähnt werden. Wie schon im Abschnitt 2.2 beschrieben, war das Verhältnis der Komponenten des Fourierspektrums das von natürlichen Zahlen. Bei sehr kleinen Amplituden der anregenden Welle konnte allerdings auch in einigen Fällen eine Inkommensurabilität der Komponenten beobachtet werden. Das Verhältnis zweier natürlicher Zahlen war dann schon bei einer Genauigkeit von  $10^{-4}$  nicht mehr gegeben. Bei einer Erhöhung der Amplitude verbesserte sich die Genauigkeit langsam, um dann an einem Schwellenwert sprunghaft bei dem durch die Subharmonischengeneration gegebenen Wert "einzurasten". Dieses Phänomen des Einrastens einer Frequenz ist auch von anderen getriebenen nichtlinearen Systemen, wie zum Beispiel dem sogenannten Rayleigh-Bénard Experiment, bekannt /17/.

## Zusammenfassung

In dieser Arbeit wurden zwei Mikrowellenresonatoren mit einem Medium mit quadratisch dispersiver Nichtlinearität vorgestellt. Anschließend wurden experimentelle Übertragungskennlinien und Resonanzkurven dieser Resonatoren mit Multistabilität präsentiert und erläutert. Ein tieferes Verständnis für das Zustandekommen dieser Multistabilität wurde durch das Solitonenkonzept erreicht und eine Vorhersage der grundsätzlichen Form der Kennlinien durch die Berechnung der maximalen Anzahl der stabilen Gleichgewichtszustände eines parametrischen Pulsgenerators (PPG) ermöglicht.

Wichtig ist die Erkenntnis, daß beide Resonatortypen die gleiche Art von Kennlinien besitzen, daß diese Multistabilität also typisch für das Medium und nicht für den Resonator ist. Im Gegensatz zur Optik wird diese echte Multistabilität innerhalb einer Ordnung der Resonanz erreicht, das bedeutet, man kann auf die zum Durchstimmen mehrerer Resonanzen nötigen großen Anregungsamplituden verzichten !

Literaturverzeichnis

- /1/ E. Abraham und S. D. Smith, "Optical bistability and related devices"  
Rep. Prog. Phys. 45, 815-885 (1982)
- /2/ J. H. Marburger und F. S. Felber, "Theory of a lossless nonlinear Fabry -  
Perot interferometer", Phys. Rev. A 17, 335-342 (1978)
- /3/ H. J. Eichler, Opt. Commun. 45, 62 (1983)
- /4/ D. A. B. Miller, S. D. Smith und C. T. Seaton, IEEE J. Quantum Electron.  
QE-17, 312 (1981)
- /5/ K. Ikeda, Opt. Commun. 30, 257 (1979)
- /6/ M. Okada und K. Takizawa, IEEE J. Quantum Electron. QE-15, 82 (1979)
- /7/ D. Jäger und F. J. Tegude, "Nonlinear wave propagation along periodic -  
loaded transmission line", Appl. Phys. 15, 393 (1978)
- /8/ D. Jäger, "Über Eigenschaften und Anwendungen nichtlinearer Wellenaus-  
breitung", Habilitationsschrift, Universität Münster (1979)
- /9/ D. Jäger, "Experiments on KdV Solitons", J. Phys. Soc. Jpn. 51, 1686 (1982)
- /10/ P. Paulus, B. Wedding, A. Gasch und D. Jäger, Phys. Lett., "Bistability  
and Solitons observed in a nonlinear ring resonator", zur Veröffentlichung  
angenommen (1984)
- /11/ J. Wessling, "Resonanzverhalten von Fabry-Perot Interferometern mit  
nichtlinearem Medium", Staatsexamensarbeit (1983), Universität Münster
- /12/ A. Gasch, "Bistabilität und dynamische Eigenschaften eines Fabry-Perot  
Interferometers mit quadratischer Nichtlinearität", Diplomarbeit, Uni-  
versität Münster (1982)
- /13/ B. Wedding und D. Jäger, "Bistability observed in a Fabry-Perot inter-  
ferometer with quadratic nonlinear medium", Appl. Phys. Lett. 41, 1028 (1982)
- /14/ P. Paulus, "Das Resonanzverhalten nichtlinearer Ringresonatoren, Anwendung  
des Solitonenkonzeptes", Diplomarbeit, Universität Münster (1982)
- /15/ G. D. Boyd und A. Ashkin, Phys. Rev. 146, 187 (1966)
- /16/ K. A. Gorshkov, L. A. Ostrovskii und V. V. Papko, Izv. Vyssh. Uchebn.  
Zaved. Radiofiz. 16, 1195 (1973)
- /17/ Verschiedene Autoren, "Ferienkurs 83, Nichtlineare Dynamik in kondensierter  
Materie", KFA Jülich, (1983), z.B. Aufsatz IX, F. Pobell



Diese Arbeit wurde im Institut für Angewandte Physik der Westfälischen Wilhelms-Universität Münster angefertigt.

Herrn Professor Dr. W. Hampe danke ich für die Bereitstellung des Arbeitsplatzes.

Herrn Privatdozent Dr. D. Jäger danke ich ganz besonders für die Betreuung der Arbeit.

Herrn Professor K. Langmann vom Mathematischen Institut der WWU Münster danke ich für die Hilfe bei der Formulierung der Gl. (3.1.2) und (3.1.3).

Für die vielen lehrreichen Diskussionen bedanke ich mich sehr bei den Herren B. Wedding, P. Paulus und besonders auch bei Herrn A. Gasch.

Ich versichere, daß ich die vorliegende Arbeit selbständig angefertigt und keine weiteren als die genannten Hilfsmittel benutzt habe.