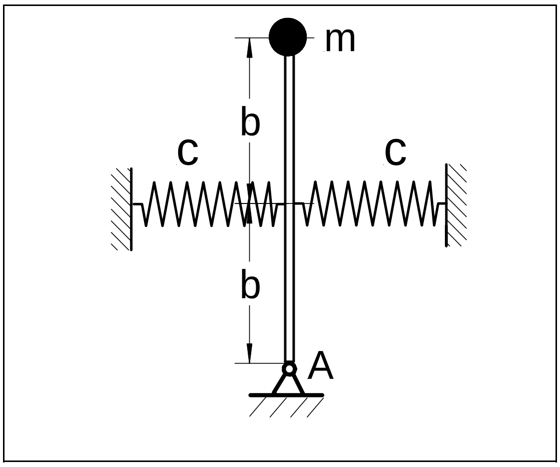
6. Freie (harmonische) Schwingungen

Aufgabe 6.1: Für den dargestellten Schwinger, bestehend aus zwei gleichen Federn **c**, einem masselosen Balken und einer Punktmasse **m**, ist die Federkonstante **c** so zu bestimmen, dass die Eigenfrequenz des Systems **f** = 3 Hz beträgt. Die skizzierte Lage entspricht der statischen Ruhelage des Systems.

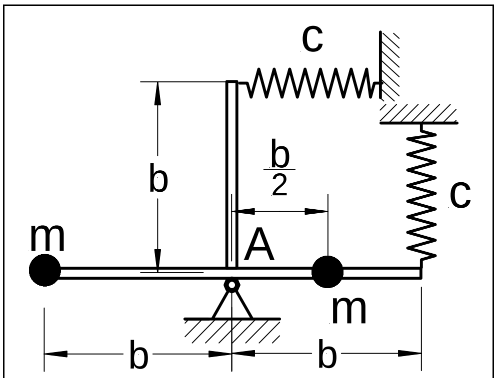
Gegeben: **m** = 0,05 kg; **b** = 0,3 m; **f** = 3 Hz.



Aufgabe 6.2: Das dargestellte System, bestehend aus einem masselosen Winkelbalken, zwei Punktmassen **m** und zwei gleichen Federn (Federkonstante **c**), ist in **A** gelenkig gelagert. Um das System aus der Ruhelage in die Bewegung zu versetzen, wird dem Winkelbalken eine Anfangswinkelgeschwindigkeit **ω(0)** mitgeteilt. Das System schwingt danach mit kleiner Amplitude um die statische Ruhelage, die in der nebenstehenden Abbildung dargestellt ist.

1. Die Bewegungsgleichung des Systems (es sind nur kleine Schwingungen zu betrachten).
2. Die Kreisfrequenz ω_0 der kleinen Schwingungen.
3. Die Masse **m**, damit die Eigenfrequenz des Systems **f** ist.
4. Die Schwingungsperiode **T** des Systems.
5. Die Bahngeschwindigkeit der linken Masse **m** zum Zeitpunkt t_1.

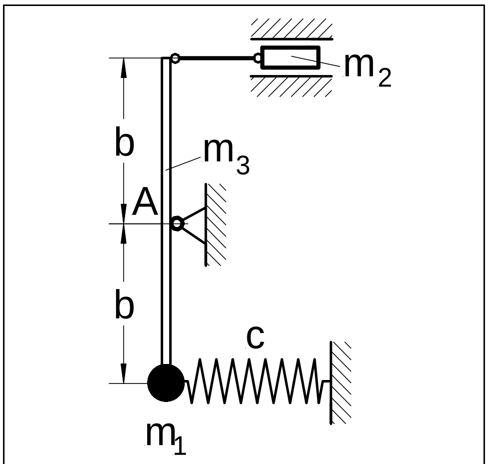
Gegeben: **c** = 5000 N/m; **b** = 0,2 m; **ω(0)** = 2 s^{-1}; **f** = 10 Hz; $\mathbf{t_1}$ = 2 s.



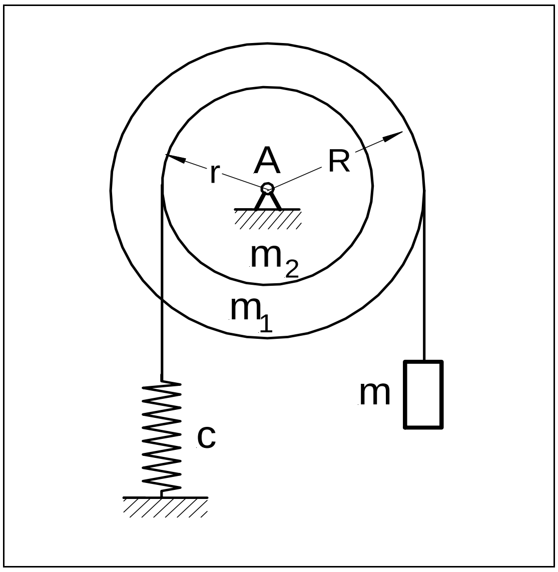
Aufgabe 6.3: Das dargestellte System, bestehend aus einem Balken (Masse $\mathbf{m_3}$), einer Feder (Federkonstante **c**) und zwei Punktmassen $\mathbf{m_1}$ und $\mathbf{m_2}$, ist in **A** gelenkig gelagert. Die skizzierte Lage entspricht der Ruhelage des Systems. Um das System aus der Ruhelage in die Bewegung zu versetzen, wird der Balken, der mit der Punkmasse $\mathbf{m_2}$ durch einen masselosen Stab verbunden ist, zum Zeitpunkt t = 0 um den Winkel φ_0 ausgelenkt und ohne Anfangswinkelgeschwindigkeit losgelassen. Zwischen der Masse $\mathbf{m_2}$ und der Führung wirkt keine Reibung.

1. Die Eigenfrequenz **f** des Systems.
2. Die Schwingungsperiode **T** des Systems.
3. Die Bahngeschwindigkeit der Punktmasse $\mathbf{m_2}$ zum Zeitpunkt t_1.

Gegeben: $\mathbf{m_1}$ = 2,0 kg; $\mathbf{m_2}$ = 4,0 kg; $\mathbf{m_3}$ = 4,5 kg; **b** = 0,2 m;
c = 50 N/m; φ_0 = 0,2 rad; $\mathbf{t_1}$ = 3 s.



Aufgabe 6.4: Um eine drehbar gelagerte Walze, bestehend aus zwei zusammengeschweißten Kreisscheiben, sind wie skizziert zwei Seile geführt. Ein Seil ist an einer Feder (Federkonstante **c**) befestigt. Am zweiten Seil ist eine Punktmasse **m** angebracht. Die gezeichnete Lage ist die Ruhelage des Systems. Um das System aus der Ruhelage in die Bewegung zu versetzen, wird der Punktmasse **m** in der gezeichneten Lage die Anfangsgeschwindigkeit **υ(0)** mitgeteilt.

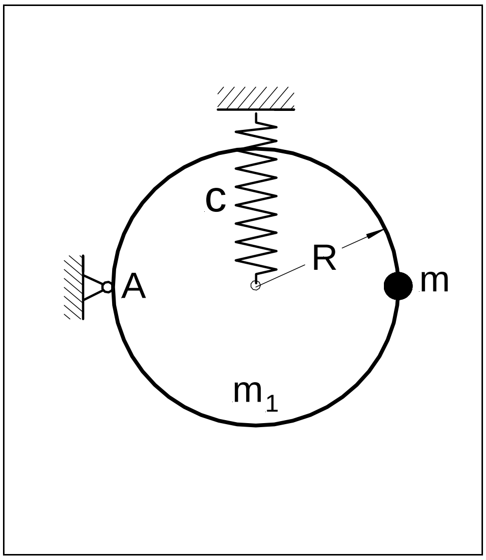


Berechnen Sie:

1. Die Kreisfrequenz der kleinen Schwingungen ω_o.
2. Den max Ausschlag der Punktmasse **m**.

Gegeben: **m** = 10 kg; $\mathbf{m_1}$ = 40 kg; $\mathbf{m_2}$ = 10 kg;
R = 0,2 m; **r** = 0,1 m; **c** = 8 kN/m; **υ(0)** = 0,4 m/s.

Aufgabe 6.5: An einer im Punkt **A** drehbar gelagerten Kreisscheibe der Masse $\mathbf{m_1}$ ist wie skizziert eine Punktmasse **m** fest angebracht. Im Mittelpunkt der Kreisscheibe ist eine Feder (Federkonstante **c**) befestigt, sie macht das Gebilde schwingfähig. Die gezeichnete Lage ist die Ruhelage des Systems. Um das System in die Bewegung zu versetzen, wird das System aus der Ruhelage um den Winkel φ_o ausgelenkt und ohne Anfangswinkelgeschwindigkeit (d.h. **ω(0)** = 0) losgelassen.

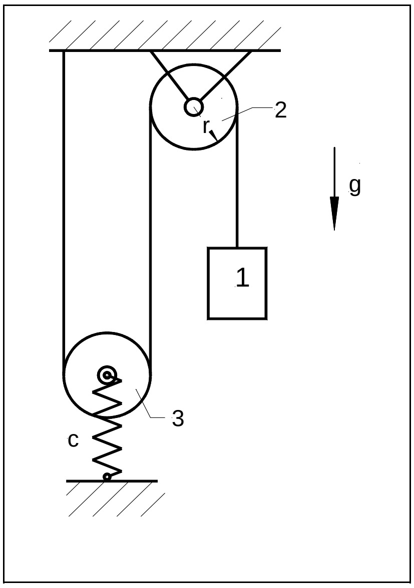


Berechnen Sie:

1. Die Kreisfrequenz der kleinen Schwingungen ω_o.
2. Die Schwingungsperiode **T** des Systems.
3. Die Bahngeschwindigkeit der Punktmasse **m** zum Zeitpunkt t_1.
4. Den max Ausschlag der Punktmasse **m**.

Gegeben: $\mathbf{m_1}$ = 2 kg; **m** = 1 kg; **R** = 0,2 m; **c** = 1200 N/m;
φ_o = 0,2 rad; **ω(0)** = 0.

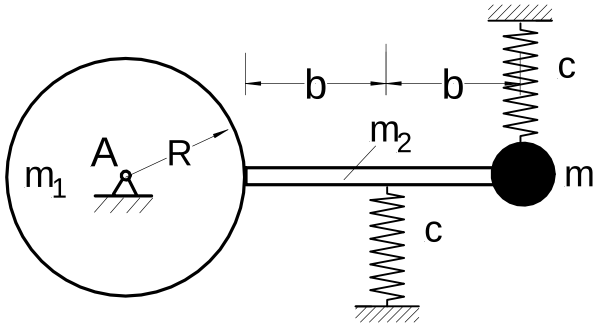
Aufgabe 6.6: An einem biegeweichen, undehnbaren Seil, das um die Scheiben 2 und 3 geschlungen ist, hängt der Quader 1. Die Kreisscheibe 3 kann ebenso wie das Seil als masselos angesehen werden. Im Mittelpunkt der Kreisscheibe 3 ist eine Feder mit der Federkonstante **c** angebracht. Das System schwingt mit kleiner Amplitude um die statische Ruhelage, die in der Abbildung dargestellt ist.



Gegeben:
$\mathbf{m_1} = \mathbf{m_2}$ = 10 kg; $\mathbf{m_3}$ = 0; **r** = 0,1m; **c** = 240 N/cm

Gesucht:

1. Statische Auslenkung der Feder
2. Bewegungsgleichung des Systems
3. Eigenkreisfrequenz ω_o des Systems
4. Maximale Geschwindigkeit des Quaders 1, wenn zum Zeitpunkt t = 0 das System in Ruhe und der Quader um 1cm nach unten aus der statischen Ruhelage ausgelenkt ist.



Gegeben: $\mathbf{m_1} = 2\mathbf{m}$; $\mathbf{m_2} = 3\mathbf{m}$; $\mathbf{m} = 3{,}25$ kg;
$\mathbf{R} = 0{,}4$ m; $\mathbf{c} = 2{,}3$ kN/m; $\mathbf{b} = 0{,}4$ m; $\boldsymbol{\upsilon}(\mathbf{0}) = 0{,}6$ m/s.

Aufgabe 6.7: An einer drehbar gelagerten Kreisscheibe der Masse $\mathbf{m_1}$ ist wie skizziert eine Stange der Masse $\mathbf{m_2}$ befestigt. Am Ende der Stange sitzt eine Punktmasse **m**. Die Kopplung der Stange mit zwei Federn (Federkonstante **c**) macht das Gebilde schwingfähig. Die gezeichnete Lage ist die Ruhelage des Systems. Um das System aus der Ruhelage in die Bewegung zu versetzen, wird der Punktmasse in der gezeichneten Lage die Anfangsgeschwindigkeit $\boldsymbol{\upsilon}(\mathbf{0})$ mitgeteilt.

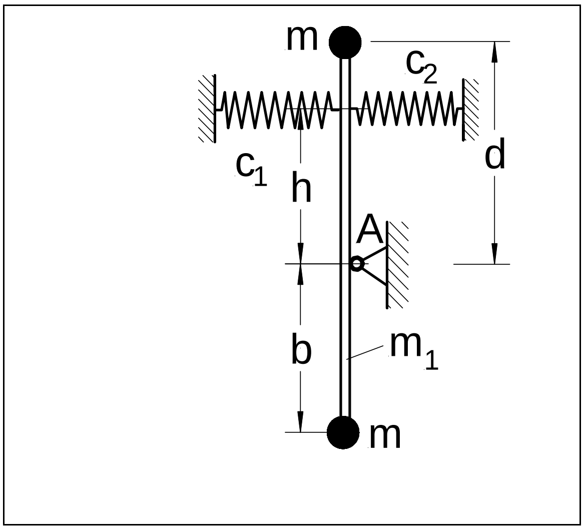
Berechnen Sie:

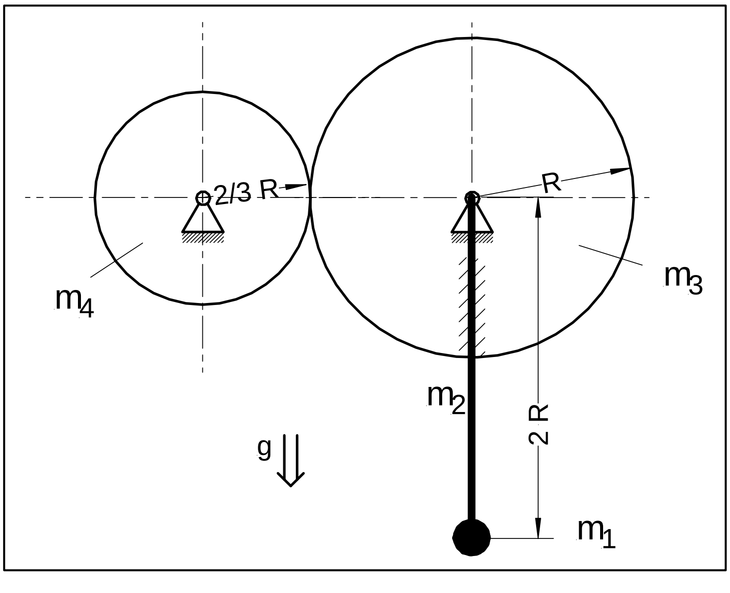
1. Die Kreisfrequenz der kleinen Schwingungen ω_o.
2. Den max Ausschlag der Punktmasse **m**.

Aufgabe 6.8: An einem um horizontale Achse **A** drehbar gelagerten Balken der Masse $\boldsymbol{m_1}$ sind wie skizziert zwei Federn (Federkonstanten $\boldsymbol{c_1}$ und $\boldsymbol{c_2}$) befestigt. An beiden Enden des Balkens sitzen zwei gleiche Punktmassen ***m***. Die gezeichnete Lage ist die Ruhelage des Systems.

Für das dargestellte System ist die Höhe **h** so zu bestimmen, dass die Schwingungsperiode der kleinen Schwingungen **T** beträgt.

Gegeben: $\boldsymbol{m_1} = 0{,}3$ kg; $\boldsymbol{m} = 0{,}1$ kg; $\boldsymbol{b} = 0{,}5$ m; $\boldsymbol{d} = 0{,}7$ m;
$\mathbf{T} = 0{,}628$ s; $\boldsymbol{c_1} = 40$ N/m; $\boldsymbol{c_1} = 80$ N/m;



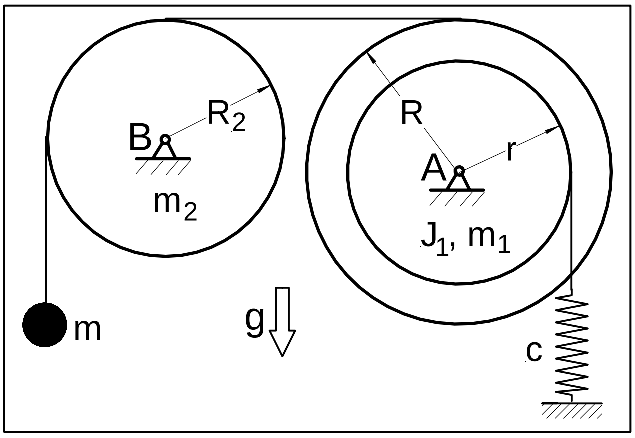


Aufgabe 6.9: Das nebenstehend gezeichnete schwingungsfähige System besteht aus zwei Kreisscheiben (Masse $\mathbf{m_3}$ und $\mathbf{m_4}$). Die Scheibe mit Masse $\mathbf{m_3}$ treibt die Scheibe mit Masse $\mathbf{m_4}$ durch Reibung an. Die Reibung ist so groß, dass kein Rutschen entsteht. An der Scheibe mit Masse $\mathbf{m_3}$ ist ein Stab (Masse $\mathbf{m_2}$) der Länge **2R** angeschweißt, an dessen Ende sich die Punktmasse $\mathbf{m_1}$ befindet.

Bestimmen Sie die Eigenfrequenz ω_0 des Systems.

Gegeben: $\mathbf{m_1}$=1.5kg, $\mathbf{m_2}$= 6kg, $\mathbf{m_3}$= 12kg, $\mathbf{m_4}$= 9kg, **R**=0.5m

Aufgabe 6.10: Eine drehbar gelagerte Walze (Masse $\mathbf{m_1}$, Massenträgheitsmoment $\mathbf{J_1}$) ist über ein Seil mit einer Kreisscheibe (Masse $\mathbf{m_2}$) verbunden. Am Ende des Seils ist wie skizziert eine Punktmasse **m** befestigt. Die Kopplung der Walze mit einer Feder (Federkonstante **c**) macht das System schwingfähig. Um das System aus der Ruhelage, die in der Skizze dargestellt ist, in Bewegung zu versetzen, wird die Punktmasse in der gezeichneten Lage in die Anfangsgeschwindigkeit $\boldsymbol{\upsilon(0)=\upsilon_0}$ versetzt.

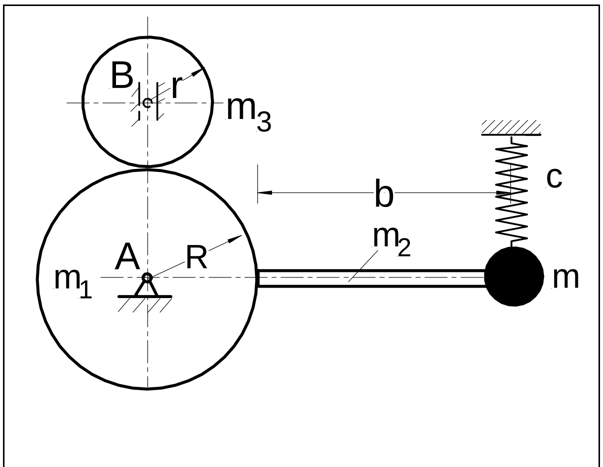


Berechnen Sie:

1. die Kreisfrequenz der kleinen Schwingungen $\boldsymbol{\omega_o}$.
2. die Schwingungsamplitude der Punktmasse **m**.

Gegeben: $\mathbf{m_1}$ = 10 kg; $\mathbf{J_1}$ = 1,6 kgm^2; $\mathbf{m_2}$ = 6 kg; **m** = 5 kg; **R** = 0,4 m; **r** = 0,2 m; $\mathbf{R_2}$ = 0,3 m; **c** = 288 N/m; $\boldsymbol{\upsilon_0}$= 0,08 m/s.

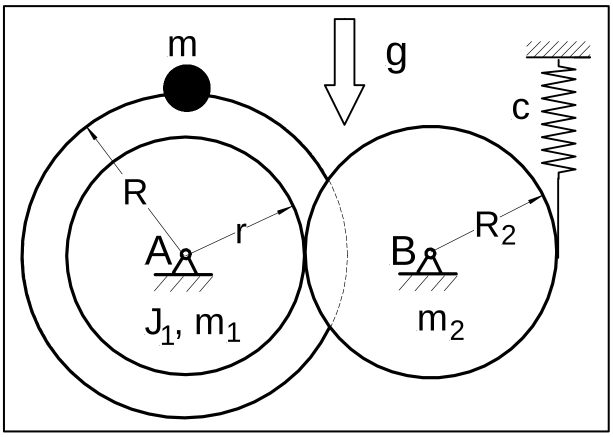
Aufgabe 6.11: An einer drehbar gelagerten Kreisscheibe der Masse $\mathbf{m_1}$ ist wie skizziert eine Stange der Masse $\mathbf{m_2}$ befestigt. Am Ende der Stange sitzt eine Punktmasse **m**. Die Kopplung der Stange mit einer Feder (Federkonstante **c**) macht das Gebilde schwingfähig. Die Kreisscheibe $\mathbf{m_1}$ treibt eine kleinere Kreisscheibe (Radius **r**, Masse $\mathbf{m_3}$) an. Die gezeichnete Lage ist die Ruhelage des Systems. Um das System aus der Ruhelage in Bewegung zu versetzen, wird die Kreisscheibe $\mathbf{m_1}$ um den Anfangswinkel $\boldsymbol{\varphi(0)}$ gedreht und ohne Anfangswinkelgeschwindigkeit losgelassen. Durch die ausreichende Haftreibung an der Kontaktstelle wird die Kreisscheibe $\mathbf{m_3}$ in Bewegung ohne Schlüpf mitgenommen. Berechnen Sie:



Gegeben: $\mathbf{m_1}$ = 2**m**; $\mathbf{m_2}$ = **m**; $\mathbf{m_3}$ = 3**m;**
m = 3,0 kg; **R** = 0,4 m; **r** = 0,2 m; **c** = 304 N/m;
b = 0,2 m; $\boldsymbol{\varphi}$ **(0)** = 0,2 rad.

1. Die Kreisfrequenz der kleinen Schwingungen $\boldsymbol{\omega_o}$.
2. Den max Ausschlag der Punktmasse **m**.

Aufgabe 6.12: Eine drehbar gelagerte Walze (Masse $\mathbf{m_1}$, Massenträgheitsmoment $\mathbf{J_1}$) kontaktiert mit einer Kreisscheibe (Masse $\mathbf{m_2}$). Die Haftung an der Kontaktstelle ist genug groß, um keinen Schlupf zu ermöglichen. An der Walze ist, wie skizziert, eine Punktmasse **m** befestigt. Die Kopplung der Kreisscheibe mit einer Feder (Federkonstante **c**) macht das System schwingfähig. Um das System aus der Ruhelage, die in der Skizze dargestellt ist, in Bewegung zu versetzen, wird die Punktmasse in der gezeichneten Lage in die Anfangsgeschwindigkeit $\boldsymbol{\upsilon(0)= \upsilon_0}$ versetzt.

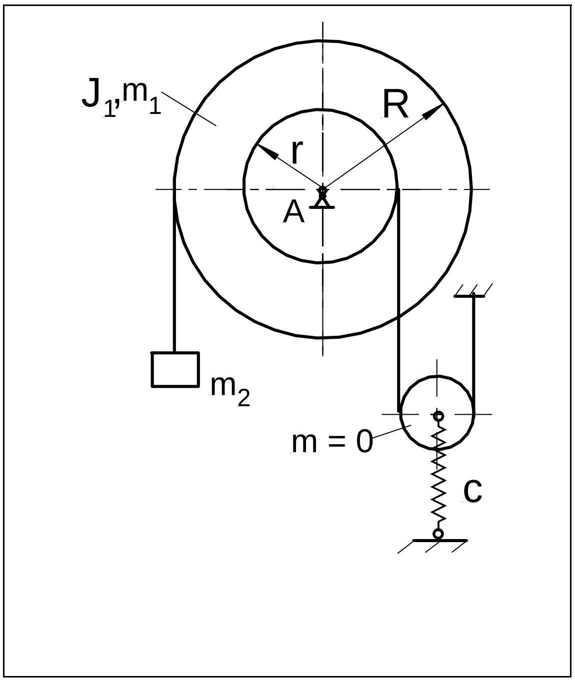


Berechnen Sie:

1. Die Kreisfrequenz $\boldsymbol{\omega_o}$ der kleinen Schwingungen.
2. Den maximalen Ausschlag der Punktmasse **m**.

Gegeben: $\mathbf{m_1}$ = 20 kg; $\mathbf{J_1}$ = 6 kgm^2; $\mathbf{m_2}$ = 10 kg; **m** = 5 kg; **R** = 0,4 m; **r** = 0,2 m; $\mathbf{R_2}$ = 0,3 m; **c** = 1000 N/m; $\boldsymbol{\upsilon_0}$= 0,034 m/s.

Aufgabe 6.13: Über die Walze **1** mit dem Massenträgheitsmoment $\mathbf{J_1}$ und der Masse $\mathbf{m_1}$ sind zwei Seile geschlungen. An einem Seil ist wie skizziert die Masse $\mathbf{m_2}$ befestigt. Das zweite Seil ist um eine masselose Scheibe, die als Umlenkrolle dient, geschlungen. An der Umlenkrolle ist eine Feder (Federkonstante c) befestigt. Das System schwingt mit kleiner Amplitude um die statische Ruhelage, die in der Abbildung dargestellt ist.



Gegeben: $\mathbf{m_1}$ = 10 kg; $\mathbf{m_2}$= 4 kg; **R** = 0,4 m; **r** = 0,2 m;
$\mathbf{J_1}$ = 3,36 kgm^2; **c** = 1,6 kN/m; $\mathbf{y_o}$ = 0,1 m; $\boldsymbol{\upsilon_o}$ = 0,2 m/s.

Gesucht:

1. Statische Auslenkung der Feder
2. Bewegungsgleichung des Systems
3. Eigenkreisfrequenz $\boldsymbol{\omega_o}$ des Systems
4. Maximale Geschwindigkeit des Körpers **2**, wenn zum Zeitpunkt t = 0 dem Körper **2** die Anfangsauslenkung $\mathbf{y_o}$ und die Anfangsgeschwindigkeit $\boldsymbol{\upsilon_o}$ mitgeteilt werden.

Aufgabe	**Ergebnisse**
6.1	c = 38,8 N/m
6.2	ω_0 = 62,8 s^{-1}; m = 2,03 kg; T = 0,1 s; $\upsilon(t_1)$ = 0,4 m/s
6.3	f = 0,7 Hz; T = 1,41 s; $\upsilon(t_1)$ = -1,22 m/s
6.4	ω_0 = 8 s^{-1}; y_{max}=0,05 m
6.5	ω_0 = 13,09 s^{-1}; T = 0,48 s; $\upsilon(t_1)$ = 1,047 m/s; y_{max}= 0,08 m
6.6	f_{st} = 0,0082 m; ω_0 = 20 s^{-1}; υ_{max}= 0,2 m/s
6.7	ω_0 = 20 s^{-1}; y_{max}=0,03 m
6.8	h = 0,3 m
6.9	ω_0 = 2,68 s^{-1}
6.10	ω_0 = 2 s^{-1}; y_{max}= 0,04 m
6.11	ω_0 = 6 s^{-1}; y_{max}= 0,12 m
6.12	ω_0 = 1,7 s^{-1}; y_{max}= 0,02 m
6.13	f_{st} = 0,0981 m; ω_0 = 2 s^{-1}; υ_{max}= 0,28 m/s