Schwingungen

Freie ungedämpfte (harmonische) Schwingungen

Die Bewegungsgleichung einer harmonischen Schwingung lautet wie folgt:

$$\ddot{x} + \omega_0^2 \cdot x = 0$$

Wenn ***c*** der Federkonstanten und ***m*** der Masse entspricht, ergibt sich die Eigenkreisfrequenz ω_0 aus der Gleichung

$$\omega_0{}^2 = \frac{c}{m}.$$

Bei harmonischen Schwingungen handelt es sich um Sinusschwingungen. Diese werden durch die Gleichungen dargestellt:

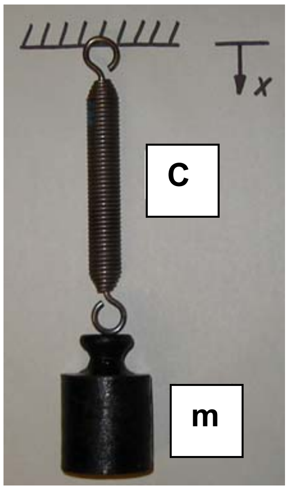


Abb. 1 Ungedämpfter Schwinger mit einem Freiheitsgrad

$$x(t) = x_m \cdot \sin(\omega_0 \cdot t + \varphi_0)$$

$$x_m = \sqrt{x_0{}^2 + \left(\frac{\dot{x}_0}{\omega_0}\right)^2}$$ - Amplitude der Schwingung

$$\tan\varphi_0 = \frac{x_0 \cdot \omega_0}{\dot{x}_0},$$, φ_0 - Nullphasenwinkel

Hierbei entspricht $\dot{x}_0$ der Anfangsgeschwindigkeit und x_0 der Anfangsauslenkung beim Zeitpunkt $t = 0$.

Die Eigenfrequenz ***f*** und die Periode der Schwingung ***T*** werden berechnet:

$$f = \frac{\omega_0}{2\pi} \qquad T = \frac{1}{f} = \frac{2\pi}{\omega_0}$$

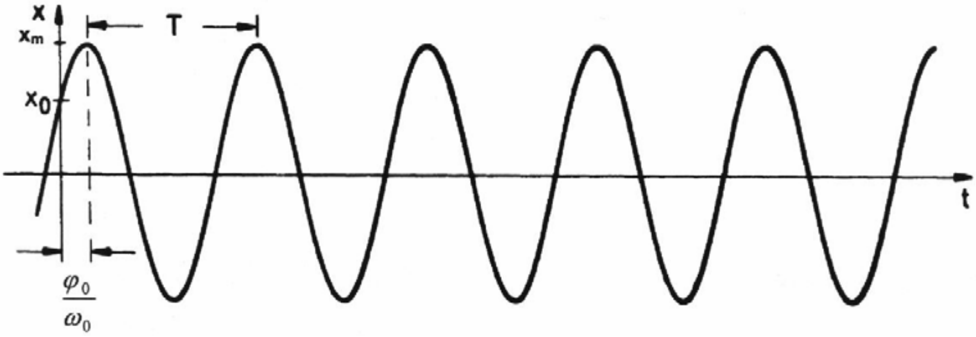


Abb. 2 Harmonische Schwingung

Freie gedämpfte Schwingungen

Bewegungsgleichung einer freien gedämpften Schwingung (Grundform) lautet wie folgt:

$$\ddot{x} + 2\delta \cdot \dot{x} + \omega_0^2 \cdot x = 0$$

$\omega_0^2 = \dfrac{c}{m}$ - Kreisfrequenz der ungedämpften Schwingung

$\delta = \dfrac{k}{2m}$ - Abklingkonstante

k - Dämpfungskonstante $(F_w = k \cdot \upsilon)$

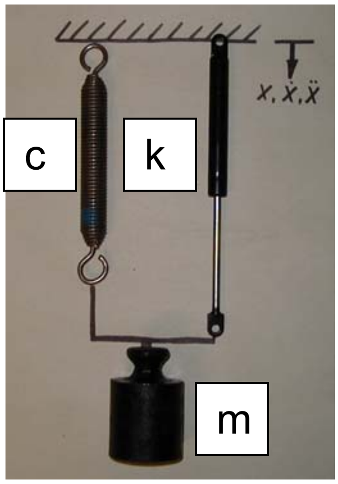


Abb. 3 Freier gedämpfter Schwinger

Lösungsansatz: $x(t) = Ce^{pt}$

Eigenwerte: $p_{1,2} = -\dfrac{k}{2m} \pm i\sqrt{\dfrac{c}{m} - \left(\dfrac{k}{2m}\right)^2} = \delta \pm i\,\omega_d$

$\omega_d = \sqrt{\dfrac{c}{m} - \left(\dfrac{k}{2m}\right)^2} = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}$ - Kreisfrequenz des gedämpften Systems

$T_d = \dfrac{2\pi}{\omega_d}$ - Periode der gedämpften Schwingung

Der momentane Ausschlag wird berechnet:

$$x(t) = e^{-\delta t}\left(x_0 \cdot \cos(\omega_d t) + \frac{x_0\delta + \upsilon_0}{\omega_d} \cdot \sin(\omega_d t) \right)$$

oder

$$x(t) = e^{-\delta t} x_m \sin(\omega_d t + \varphi_0)$$

mit x_0 - Anfangsauslenkung; υ_0 - Anfangsgeschwindigkeit

$x_m = \sqrt{x_0^{\,2} + (\dfrac{x_0\delta + \upsilon_0}{\omega_d})^2}$ - Amplitude der Schwingung

$\tan\varphi_0 = \dfrac{x_0\omega_d}{x_0\delta + \upsilon_0}$ - φ_0 - Phasenwinkel

In Abb. 4 ist eine gedämpfte Schwingung dargestellt. Mit Voranschreiten der Schwingungsdauer findet eine stetige Reduzierung der Amplitude statt.

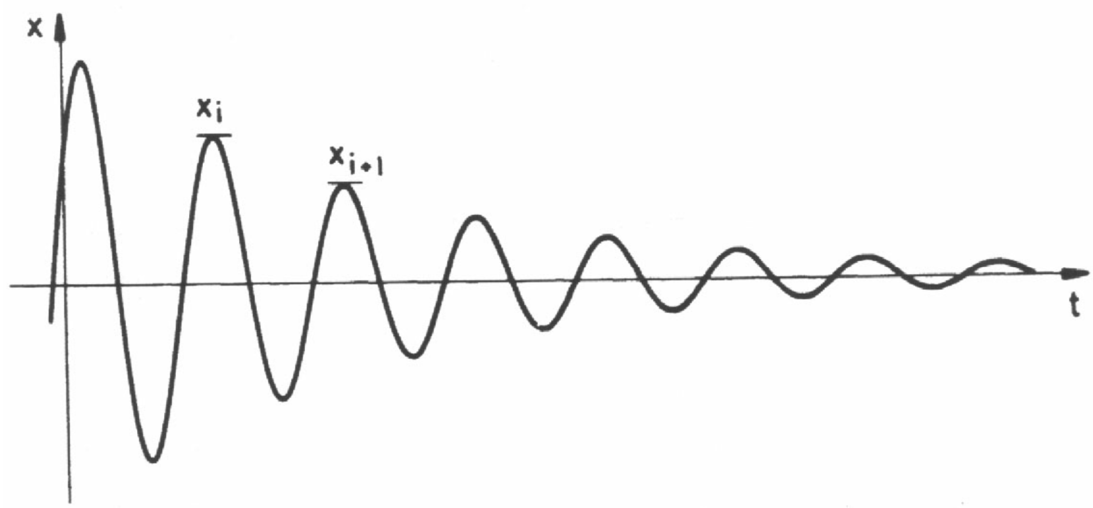


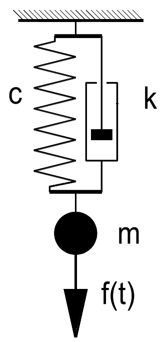
Abb. 4 Gedämpfte Schwingung

Zur Beurteilung des Abklingverhaltens eines Systems betrachtet man die Abnahme des Schwingungsausschlages mit der Zeit. Die maximale Ausschläge einer Schwingung verhalten sich als:

$$\frac{x_E(t)}{x_E(t+zT_d)} = \ell^{z\delta T_d} = \ell^{z\Omega}$$ z - Anzahl der vollen Perioden

$$\Omega = \delta \frac{2\pi}{\omega_d} = \delta T_d$$ - Logarithmisches Dekrement

Erregte Schwingungen



Bewegungsgleichung eines erregten Systems lautet wie folgt:

$$\ddot{x} + 2 \cdot \delta \cdot \dot{x} + \omega_0^{\,2} \cdot x = f(t)$$, hier $f(t)$ - Erregerfunktion

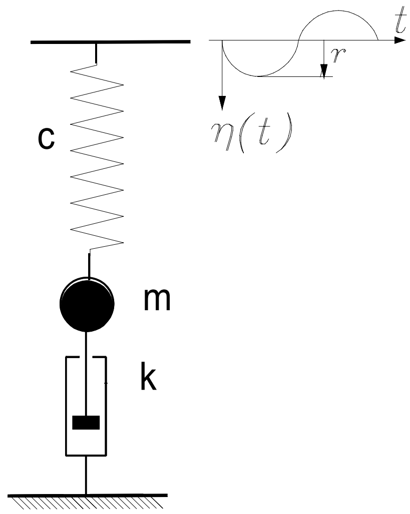
Lösungsansatz: $$x(t) = x_{\text{hom}} + x_p$$

x_{hom} - Lösung der homogenen Differentialgleichung (ohne Erregung)

x_p - Lösung der speziellen Differentialgleichung

Erzwungene Schwingungen mit Federerregung

Erregerfunktion: $\eta(t) = r \cdot \sin(\omega \cdot t)$



r - Amplitude der Erregerfunktion
ω - Erregerfrequenz

Bewegungsgleichung:

$$\ddot{x} + 2 \cdot \delta \cdot \dot{x} + \omega_0^{\,2} \cdot x = \omega_0^{\,2} \cdot r \cdot \sin(\omega \cdot t).$$

Die Lösung der Differentialgleichung lautet:

$$x(t) = x_m \cdot \sin(\omega \cdot t - \varphi)$$

Die Phasenverschiebung zwischen erregender und resultierender Schwingung wird durch den Winkel φ und die Schwingungsamplitude durch x_m ausgedrückt. Diese beiden Größen stellen Frequenzgänge des Phasenwinkels und der Amplitude dar:

$$\varphi = \arctan\left(\frac{2 \cdot \vartheta \cdot \frac{\omega}{\omega_0}}{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}\right)$$ - Frequenzgang des Phasenwinkels

$$x_m = \frac{r}{\sqrt{\left(1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2\right)^2 + \left(2 \cdot \vartheta \cdot \frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}}$$ - Amplitudenfrequenzgang (Resonanzkurve)

$$\vartheta = \frac{\delta}{\omega_0}$$ - Dämpfungsgrad.

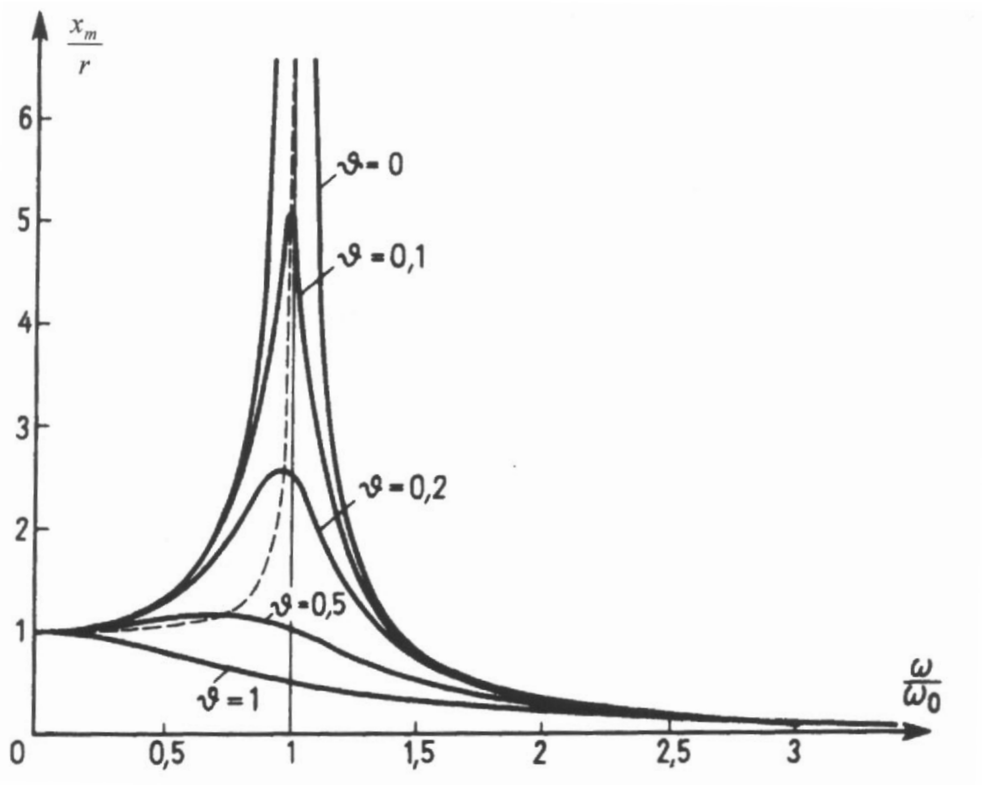


Abb. 5 Frequenzgänge der Schwingungsamplitude (Resonanzkurven)

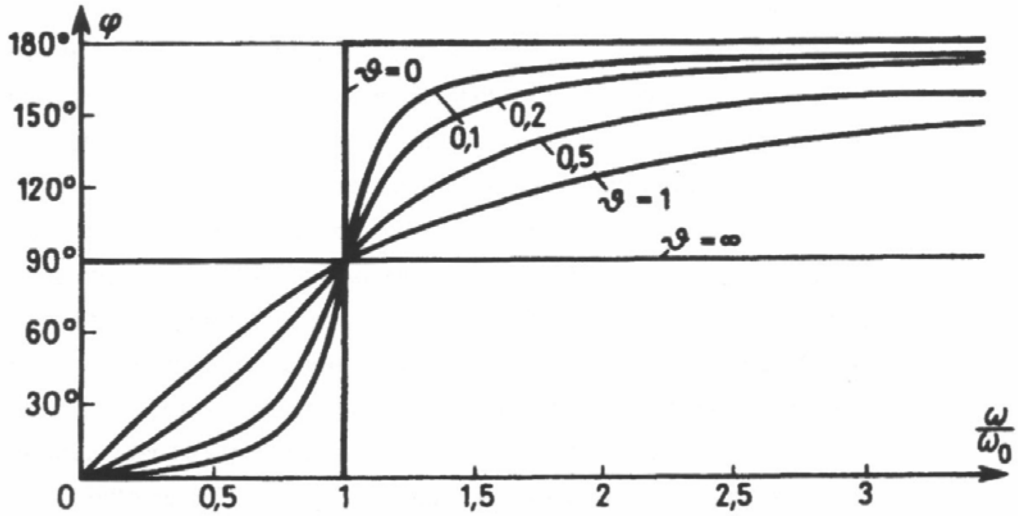


Abb. 6 Frequenzgänge der Phasenverschiebung

Erzwungene gedämpfte Schwingungen mit Anregung durch Trägheits- bzw. Fliehkräfte

Für diesen Fall gilt die Bewegungsgleichung

$$\ddot{x} + 2 \cdot \delta \cdot \dot{x} + \omega_0^2 \cdot x = s \cdot \omega^2 \cdot \sin(\omega \cdot t).$$

s - Amplitude der Erregerfunktion

ω - Erregerfrequenz

Die Lösung der Differentialgleichung wird ausgedrückt durch

$$x(t) = x_m \cdot \sin(\omega \cdot t - \delta)$$

mit
$$x_m = \frac{s \cdot \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}{\sqrt{\left(1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2\right) + \left(2 \cdot \vartheta \cdot \frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}}$$
(Frequenzgang der Amplitude)

und
$$\tan \varphi = \frac{2 \cdot \vartheta \cdot \frac{\omega}{\omega_0}}{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}.$$
(Phasenverschiebungsgang)