Kinetik des Massenpunktes

Das Grundgesetz von Newton

- in Vektorform: $\vec{F} = m \cdot \vec{a}$

- in Komponentenform: (karthesische Koordinaten)

$$\sum F_{ix} = m \cdot \ddot{x} = m \cdot a_x;$$
$$\sum F_{iy} = m \cdot \ddot{y} = m \cdot a_y; \quad \sum F_{iz} = m \cdot \ddot{z} = m \cdot a_z;$$

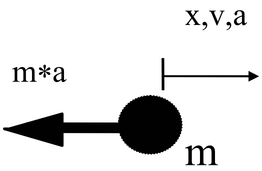
- in Komponentenform: (Polarkoordinaten)

$$\sum F_{it} = m \cdot a_t;$$
$$\sum F_{in} = m \cdot a_n;$$

Das Prinzip von D`Alembert

Trägkeitskraft entgegen positiver Beschleunigungsrichtung ansetzen und Gleichgewichts-bedingungen der Statik aufstellen:

Translation:

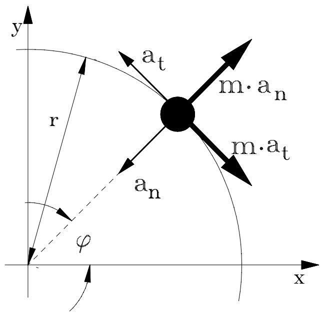


- in Vektorform: $\vec{F} + m \cdot (-\vec{a}) = 0$

- in Komponentenform: (kart. Koordinaten)

$$\sum F_{ix} + m \cdot (-\ddot{x}) = \sum F_{ix} + m \cdot (-a_x) = 0;$$
$$\sum F_{iy} + m \cdot (-\ddot{y}) = \sum F_{iy} + m \cdot (-a_y) = 0;$$
$$\sum F_{iz} + m \cdot (-\ddot{z}) = \sum F_{iy} + m \cdot (-a_z) = 0$$

Rotation (Kreisbewegung):



- in Komponentenform (Polarkoordinaten):

- normal: $\sum F_{in} + m \cdot \left(-a_n\right) = 0; \quad a_n = r \cdot \omega^2 = \frac{v^2}{r}$

- tangential: $\sum F_{it} + m \cdot \left(-a_t\right) = 0; \quad a_t = r \cdot \alpha$

Das Grundgesetz der Drehbewegung für den starren Körper

$$\sum M_{iZ} = J_Z \cdot \alpha$$

Massenträgheitsmoment J_Z: $\quad J_z = \int r^2 \cdot dm$

Satz von Steiner: $\quad J_z = J_s + m \cdot r_s^2$

J_S: Massenträgheitsmoment des Körpers um den Schwerpunkt;
r_S: Abstand zwischen dem Drehpunkt und dem Schwerpunkt

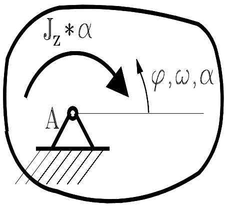
Massenträgheitsmomente

Kreisscheibe, Kreiszylinder (Masse **m**, Radius **R**): $J_s = \frac{m \cdot R^2}{2}$

Hohlzylinder (Masse **m**, Außenradius **R**, Innenradius **r**): $J_s = \frac{m \cdot}{2}(R^2 + r^2)$

Stab (Masse **m**, Länge ***l***): $J_s = \frac{m \cdot l^2}{12}$

Das Prinzip von D`Alembert für die Drehbewegung:



Moment der Trägkeitskräfte entgegen positiver Winkelbeschleunigungsrichtung ansetzen und Gleichgewichtsbedingungen der Statik aufstellen

$$\sum M_{iA} + J_Z(-\ddot{\varphi}) = \sum M_{iA} + J_Z(-\alpha) = 0$$

Freie ungedämpfte harmonische Schwingungen

Differentialgleichung der harmonischen Schwingung
(Der Koordinatenursprung befindet sich in der statischen Ruhelage des Systems):

Geradlinige Bewegung: $\ddot{x} + \omega_0{}^2 \cdot x = 0$

Drehbewegung: $\ddot{\varphi} + \omega_0{}^2 \cdot \varphi = 0$

Die Lösung der Differentialgleichung der harmonischen Schwingungen:

$$x(t) = x_0 \cdot \cos(\omega_0 \cdot t) + \frac{v_0}{\omega_0}\sin(\omega_0 \cdot t)$$ oder

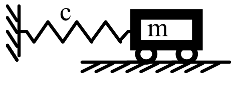
$$x(t) = x_m \cdot \cos(\omega_0 \cdot t + \varphi_0); \quad x_m = \sqrt{x_0^2 + \frac{v_0^2}{\omega_0^2}}, \quad \tan\varphi_0 = -\frac{v_0}{x_0 \cdot \omega_0},$$ oder

$$x(t) = x_m \cdot \sin(\omega_0 \cdot t + \varphi_0); \quad x_m = \sqrt{x_0^2 + \frac{v_0^2}{\omega_0^2}}, \quad \tan\varphi_0 = \frac{x_0 \cdot \omega_0}{v_0},$$

x_0: Anfangsverschiebung,
v_0: Anfangsgeschwindigkeit
x_m: Amplitude der Schwingung
φ_0: Nullphasenwinkel
ω_0: Kreisfrequenz

Schwingungsdauer: $T = \frac{2\pi}{\omega_0}$; Eigenfrequenz: $f[Hz] = \frac{\omega_0}{2\pi} = \frac{1}{T}$

Ein-Massen-Schwinger:



$\omega_0 = \sqrt{\frac{c}{m}}$

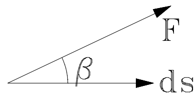
Ahtung - Drehbewegung: gleiche Formeln anwenden, dabei x durch φ und v durch ω ersetzen

Arbeit

Die zwischen der Lage $0(t_0)$ und der Lage $1(t_1)$ geleistete Arbeit einer Kraft:

$$W_{0,1} = \int_{s_0}^{s_1} F_t \cdot ds = \int_{s_0}^{s_1} F \cdot \cos\beta \cdot ds = \int_{x_0}^{x_1} F_x \cdot dx + \int_{y_0}^{y_1} F_y \cdot dy + \int_{z_0}^{z_1} F_z \cdot dz = \int_{t_0}^{t_1} P(t) \cdot dt$$

F_t: Kraftkomponente tangential zur Bewegungsrichtung



Die zwischen der Lage $0(t_0)$ und der Lage $1(t_1)$ geleistete Arbeit eines Momentes:

$$W_{0,1} = \int_{\varphi_0}^{\varphi_1} M(t) \cdot d\varphi = \int_{t_0}^{t_1} P(t) \cdot dt$$

Hubarbeit: $W_{0,1} = m \cdot g \cdot (h_1 - h_0) = m \cdot g \cdot \Delta h$

Federspannarbeit: $W_{0,1} = c\,\dfrac{s_1^2 - s_0^2}{2}$; c: Federkonstante [N/m]

Drehfederspannarbeit: $W_{0,1} = c_D\,\dfrac{\varphi_1^2 - \varphi_0^2}{2}$; c_D: Drehfederkonst. [Nm/rad]

Beschleunigungsarbeit: $W_{0,1} = \dfrac{m}{2}(v_1^2 - v_0^2)$ (Translation)

$W_{0,1} = \dfrac{J_z}{2}(\omega_1^2 - \omega_0^2)$ (Drehbewegung)

Energie

Die Energie ist im Körper gespeicherte Arbeitsfähigkeit

(Energie beschreibt einen Zustand, Arbeit einen Vorgang!!!)

Potentiele Energie der Lage: $E_{ph} = m \cdot g \cdot (h_1 - h_0) = m \cdot g \cdot \Delta h$

(h_0: Nullniveau)

Potentiele Energie der Feder: $E_{pf} = c\,\dfrac{s^2}{2}$

Potentiele Energie der Drehfeder: $E_{pf} = c_D\,\dfrac{\varphi^2}{2}$

Kinetische Energie der Masse: $E_k = \dfrac{m \cdot v^2}{2}$

Kinetische Energie der Drehbewegung: $E_k = \dfrac{J_z}{2}\omega^2$

Energieerhaltungssatz: $E_k^{(1)} + E_p^{(1)} = E_k^{(0)} + E_p^{(0)}$ - ohne Verluste (ohne Reibung)

Energieerhaltungssatz: $$E_k^{(0)} + E_p^{(0)} = E_k^{(1)} + E_p^{(1)} + W_{0,1}$$

E_k: Summe der kinetischen Energieen

E_p: Summe der potentiellen Energieen

$W_{0,1}$: Arbeit der Kräfte ohne Potential (z.B. Reibungsarbeit)

Leistung

Leistung einer Kraft: $$P(t) = \frac{dW}{dt} = F_t(t) \cdot \upsilon(t) = \vec{F} \cdot \vec{\upsilon}$$

F_t: Kraftkomponente tangential zur Bewegungsrichtung

Die Leistung eines Momentes: $$P(t) = \frac{dW}{dt} = M(t) \cdot \omega(t)$$

Wirkungsgrad

$$\eta = \frac{\text{Nutzen}}{\text{Aufwand}}$$

Mittlerer Wirkungsgrad (in einem Zeitintervall):

$$\eta = \frac{W_N}{W_z} = 1 - \frac{W_V}{W_z}$$

W_N: Nutzarbeit

W_z: zugeführte Arbeit

W_V: Verlustarbeit

Momentaner Wirkungsgrad:

$$\eta = \frac{P_N}{P_z} = 1 - \frac{P_V}{P_z}$$

P_N: Nutzleistung

P_z: zugeführte Leistung

P_V: Verlustleistung